1. přednáška 4. října 2005

Kapitola 1 — metrické a topologické prostory

1.1. Metrické prostory—základní definice. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina a

$$d: M \times M \to \mathbf{R}_{\geq 0}$$

je funkce, zvaná *metrika*, splňující tři axiomy:

a) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetrie),
b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ a
c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Metrické prostory jsou abstrakcí jevu vzdálenosti. Poznamenejme, že nezápornost hodnot metriky se nemusí předpokládat, vyplývá už z axiomů b) a c).

Izometrie je bijekce $f: M_1 \to M_2$ mezi metrickými prostory (M_1, d_1) a (M_2, d_2), která zachovává vzdálenosti: $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ pro všechny $x, y \in M_1$. Existuje-li taková bijekce, jsou prostory M_1 a M_2 *izometrické*, to jest prakticky nerozlišitelné, izomorfní.

Příklady metrických prostorů. 1. Nechť $M = \mathbf{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$)

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Axiomy a) a b) se ověří lehce, ovšem důkaz trojúhelníkové nerovnosti je netriviální. Pro $n = 1$ dostáváme metriku $|x - y|$ a pro $p = 2, n \geq 2$ *euklidovskou metriku*

$$d_2(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2};$$

euklidovskými prostory budeme nadále rozumět metrické prostory $(\mathbf{R}^n, d_2)$. Pro $p = 1, n \geq 2$ dostáváme tzv. *pošťáckou metriku* a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

(dokažte jako cvičení).

2. Jako M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f: X \to \mathbf{R}$, kde X je nějaká množina, a pak na M máme *supremovou metriku*

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Pokud $M = C(a,b)$ (množina všech reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$), supremum se vždy nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

3. Vezměme $M = C(a,b)$ a reálné číslo $p \geq 1$. Podobně jako v prvním příkladu máme na M metriky

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Hodnota $p = 1$ dává *integrální metriku* a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu (dokažte jako cvičení). Důležitý je opět případ $p = 2$. Co je na exponentu $p = 2$ zvláštního? Ukazuje se, že metrika $d_2(\cdot, \cdot)$ (zde i v prvním příkladu) je odvozena ze skalárního součinu na jistém vektorovém prostoru, a proto má řadu pěkných a důležitých vlastností. Zmíníme se o tom v závěru první kapitoly.

Vezmeme-li $M = R(a,b)$ (množina všech funcí majících na $[a,b]$ Riemannův integrál), je $d_p(f,g)$ definována, ale nesplňuje axiom b) a nedostáváme metriku. Změníme-li například hodnotu funkce $f \in R(a,b)$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in R(a,b)$, ale $d_p(f, f_0) = 0$. Tato potíž se odstraní tak, že místo $R(a,b)$ pracujeme s $R(a,b)/\sim$, kde $\sim$ je vhodná relace ekvivalence; nebudeme se pouštět do podrobností.

4. Souvislý graf $G = (M, E)$ s množinou vrcholů M definuje metriku

$$d(u,v) = \#\text{ hran na (nějaké) nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v.$$

5. Položme $M = \mathbf{Z}$ (množina celých čísel) a vezměme nějaké prvočíslo p (třeba $p = 29$). Pro $z \in \mathbf{Z}$ jako $m_p(z)$ označíme největší celé číslo $e \geq 0$ takové, že p^e dělí z; $m_p(0) := \infty$. Na M definujeme tzv. *p-adickou metriku* ($2^{-\infty} = 0$)

$$d_p(x,y) = 2^{-m_p(x-y)}.$$

Dokažte jako cvičení, že p-adická metrika splňuje toto zesílení trojúhelníkové nerovnosti:

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(z,y)).$$

Metrikám splňujícím tuto silnější verzi trojúhelníkové nerovnosti se říká *ultrametriky.* Ukažte jako cvičení, že v ultrametrickém prostoru jsou všechny trojúhelníky rovnoramenné a že v libovolné kouli je každý bod jejím středem.

V další textu (M, d) označuje metrický prostor. Připomínáme, že pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ se *(otevřenou) koulí (se středem a a poloměrem r)* rozumí množina $B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$. *Uzavřená koule (se středem a a poloměrem r)* je $\overline{B}(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$. Podmnožina $X \subset M$ je *otevřená*, pokud $\forall a \in X\ \exists r > 0 : B(a, r) \subset X$. $X \subset M$ je *uzavřená*, pokud je $M \backslash X$ otevřená množina.

Dokažte jako cvičení, že každá koule $B(a, r)$ je otevřená množina a že každá konečná množina je uzavřená.

Tvrzení 1. *V metrickém prostoru (M, d) jsou množiny $\emptyset$ a M otevřené i uzavřené. Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Důkaz. Množiny $\emptyset$ a M jsou zjevně otevřené a tedy (jsou doplňkem jedna druhé) i uzavřené. Nechť $G_i, i \in I$ jsou otevřené množiny a $a \in G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Pak a leží v nějaké G_j a tedy, pro nějaké $r > 0$, $B(a, r) \subset G_j \subset G$ a G je otevřená. Nechť je indexová množina I konečná a $a \in G = \bigcap_{i \in I} G_i$. To znamená, že $a \in G_i$ pro každé $i \in I$, a tak $B(a, r_i) \subset G_i$ pro nějaká čísla $r_i > 0$. Protože jich je jen konečně mnoho, můžeme vzít $r > 0$, že $r < \min(r_i : i \in I)$, a máme $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset G_i$ pro všechna $i \in I$. Tedy $B(a, r) \subset G$ a G je otevřená. Tvrzení o uzavřených množinách vyplývají pomocí de Morganových identit přechodem k doplňkům. □

Okolí bodu $a \in M$ je otevřená množina $U \subset M$ obsahující a jako prvek. Nechť $a \in M$ a $X \subset M$. V následujících definicích píšeme stručně U a rozumíme tím "okolí U bodu a". Řekneme, že a je *vnitřním bodem* množiny X, existuje-li U, že $U \subset X$. Podobně je a *vnějším bodem* množiny X, existuje-li U, že $U \subset M \backslash X$ (tj. a je vnitřním bodem doplňku X). Není-li a ani vnitřním ani vnějším bodem X, je *hraničním bodem* X. Jinými slovy to znamená, že každé U protíná X i doplněk X. Je-li pro každé U průnik $U \cap X$ nekonečný, nazývá se *a limitním bodem* X. Konečně, pokud existuje U, že $U \cap X = \{a\}$, je *a izolovaným bodem* X. Vnitřní a izolované body množiny v ní samozřejmě leží a vnější body leži mimo ni. Hraniční a limitní body množiny mohou ležet v ní i mimo ni. *Uzávěr* množiny $X \subset$ se značí $\overline{X}$ a je to sjednocení X a množiny limitních bodů množiny X.

Příklad. Nechť (M, d) je euklidovská rovina $\mathbf{R}^2$ a $X = (B \backslash \{p\}) \cup \{b\}$, kde B je otevřený kruh (tj. koule) se středem v počátku $p = (0, 0)$ a poloměrem 1 a $b = (2, 0)$. Pak vnitřní body X tvoří množinu $B \backslash \{p\}$, vnější body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| > 1, x \neq b\}$, hraniční body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \cup \{p, b\}$, limitní body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a izolované body množinu $\{b\}$. Uzávěr X je množina $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \cup \{b\}$.

Tvrzení 2. *Množina X je uzavřená, právě když se rovná svému uzávěru, $X = \overline{X}$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Protože je X uzavřená, $U = M \backslash X$ je otevřená a je okolím každého bodu mimo X. Protože $U \cap X = \emptyset$, není žádný bod mimo X limitním bodem X a máme $X = \overline{X}$.

Implikace $\Leftarrow$. Z předpokladu $X = \overline{X}$ odvodíme otevřenost $M \backslash X$. Nechť a je libovolný bod mimo X. Protože není limitním bodem X, má okolí U protínající X jen v konečně mnoha bodech. Z toho plyne, že existuje (menší) okolí U_a bodu a, které je disjunktní s X. (Množina $P = U \cap X$ je konečná, a proto uzavřená. Stačí vzít $U_a = U \cap (M \backslash P)$.) Pak

$$M \backslash X = \bigcup_{a \in M \backslash X} U_a$$

a množina $M \backslash X$ je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. $\square$

Posloupnost $(x_n) = (x_1, x_2, \dots) \subset M$ bodů v metrickém prostoru (M, d) je *konvergentní*, pokud existuje bod $a \in M$ takový, že

$$\forall U,\ U \text{ je okolí bodu } a,\ \exists N : n \geq N \Rightarrow x_n \in U.$$

Bod a se pak nazývá *limitou* posloupnosti (x_n). Dvě ekvivalentní formulace tohoto faktu: (i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : d(x_n, a) < \varepsilon$ a (ii) $\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$ (limitu posloupnosti bodů z metrického prostoru jsme převedli na limitu posloupnosti reálných čísel). Pojem limity v metrickém prostoru má obvyklé vlastnosti, zejména je limita určena jednoznačně a podposloupnost má tutéž limitu jako výchozí konvergentní posloupnost. Posloupnost (x_n) v (M, d) je *cauchyovská*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Tvrzení 3. *Nechť a je bod v metrickém prostoru (M, d) a $X \subset M$. Pak a leží v uzávěru množiny X, právě když leží v X nebo je limitou posloupnosti bodů z X.*

Důkaz. Dokažte si jako cvičení. $\square$

Uvedeme dvě jednoduché konstrukce vyrábějící nové metrické prostory ze starých. Metrický prostor (M_1, d_1) je *podprostorem* metrického prostoru (M_2, d_2), pokud $M_1 \subset M_2$ a pro každé dva body x, y z M_1 máme $d_1(x, y) = d_2(x, y)$. (M, d) je *součinem* metrických prostorů (M_1, d_1) a (M_2, d_2), když $M = M_1 \times M_2$ a d je jedna z následujících třech metrik ($x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$ jsou z M a označili jsme $v_1 = d_1(x_1, y_1), v_2 = d_2(x_2, y_2)$):

$$d(x, y) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ nebo } d(x, y) = v_1 + v_2 \text{ nebo } d(x, y) = \max(v_1, v_2).$$

Metrický prostor (M, d) a podmnožina $X \subset M$ dávají nový metrický prostor (X, d'), kde d' je metrika d zúžená na $X \times X$; je jasné, že (X, d') je podprostorem (M, d). Říká se také, že (X, d') je podprostor s *indukovanou metrikou.* Důležitá poznámka: za této situace můžeme mít posloupnost $(x_n) \subset X$, která je konvergentní v (M, d), ale nikoli v indukovaném podprostoru (X, d'), v němž prostě chybí její limita. Například posloupnost $(1/n)$ konverguje v euklidovském prostoru $\mathbf{R}$, ale nikoli v euklidovském podprostoru $(0, 1)$. Konvergentnost posloupnosti je v tomto smyslu relativní vlastnost. Totéž platí pro otevřenost či uzavřenost množiny: interval $[1/2, 1)$ je uzavřená množina v $(0, 1)$, ale už to není uzavřená množina v nadprostoru $\mathbf{R}$. Na druhou stranu je třeba cauchyovskost posloupnosti absolutní vlastnost, která nezávisí na tom, v kterém pod- či nadprostoru danou posloupnost uvažujeme.

Může se zdát trochu divné, že v definici součinu metrických prostorů necháváme vybrat z několika součinových metrik. Není ale těžké vidět, že všechny tři definují stejné otevřené podmnožiny v $M = M_1 \times M_2$, a proto odpovídající součinové prostory se velmi podobají (konverguje-li posloupnost v jedné z metrik, konverguje ve všech třech a navíc k téže limitě atd.). Pro úvahy a pojmy, kde se vystačí jen s otevřenými množinami (což zahrnuje vše z této přednášky, s vyjímkou izometrie a cauchyovskosti posloupnosti), jsou tyto tři součinové metriky nerozlišitelné. Zformalizujeme to v příští přednášce v definici topologického prostoru.

2. přednáška 11. října 2005

1.2. Topologické prostory. *Topologický prostor* (nebo stručněji *topologie*[1]) je dvojice $(X, \mathcal{T})$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ je systém (ne nutně všech) podmnožin množiny X, zvaných *otevřené množiny*, splňující tři axiomy:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
b) je-li $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ libovolný podsystém $\mathcal{T}$, potom $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ a
c) je-li $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ libovolný konečný podsystém $\mathcal{T}$, potom $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Systém otevřených množin tedy obsahuje prázdnou množinu a celé X a je uzavřený na libovolná sjednocení a na konečné průniky. *Uzavřené množiny* topologie $(X, \mathcal{T})$ jsou množiny $\{X \backslash U \mid U \in \mathcal{T}\}$. *Okolí bodu* $a \in X$ je otevřená množina U taková, že $a \in U$.

Nejjednodušší příklad topologického prostoru je dvojice $(X, \{\emptyset, X\})$. Základní příklad je systém otevřených množin metrického prostoru (podle tvrzení 1 tvoří topologický prostor); budeme stručně mluvit o *topologii metrického prostoru. Euklidovským prostorem* $\mathbf{R}^n$ budeme rozumět $\mathbf{R}^n$ s topologií definovanou euklidovskou metrikou d_2 (za chvíli uvidíme, že stejnou topologii definuje i každá z metrik d_p a d_∞).

Topologický prostor tvořený otevřenými množinami v nějakém metrickém prostoru se nazývá *metrizovatelný.* Zdaleka ne všechny topologie jsou metrizovatelné. Metrizovatelnost implikuje různé speciální vlastnosti, které obecně topologie mít nemusejí, a když je nemají, nejsou metrizovatelné. Například už víme, že každá konečná množina je v metrizovatelné topologii uzavřená. Proto topologie $(X, \{\emptyset, X\})$ není pro X s více než jedním prvkem metrizovatelná. Další důležitá vlastnost metrizovatelné topologie $(X, \mathcal{T})$ je:

$$\forall\, a, b \in X, a \neq b\ \exists\, U, V \in \mathcal{T}:\ a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset,$$

to jest, každé dva různé body mají disjunktní okolí (dokažte jako cvičení). Topologickým prostorům s touto vlastností se říká *Hausdorffovy*[2] nebo *hausdorffovské.* Topologie, která není Hausdorffova, není metrizovatelná. V tomto textu se budeme zabývat pouze hausdorffovskými topologiemi.

[1] Z řeckých výrazů topos = místo a logos = vědění, slovo.

[2] Německý matematik Felix Hausdorff (1868–1942) zavedl pojem topologického prostoru v r. 1914.

Báze topologie $(X, \mathcal{T})$ je takový podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, že každá množina z $\mathcal{T}$ se dá vyjádřit jako sjednocení množin z $\mathcal{S}$. Například systém všech koulí $\{B(a, r) \mid a \in M, r > 0\}$ v metrickém prostoru (M, d) tvoří bázi topologie (M, d). Pro zadání topologie stačí zadat nějakou její bázi, tak jsme ostatně definovali otevřené množiny v metrickém prostoru (viz ještě poznámku o bázi topologie v příští 3. přednášce).

Dvě metriky (X, d_1) a (X, d_2) na téže množině jsou *ekvivalentní*, pokud definují stejnou topologii. K tomu je nutné a stačí, aby pro každý bod a z X a každé $r > 0$ existovalo $s > 0$ takové, že $B_{d_1}(a, s) \subset B_{d_2}(a, r)$ a naopak (s vyměněnými d_1 a d_2). Uveďme postačující podmínku ekvivalence metrik (která není obecně nutná): existují-li konstanty $0 < r \leq s$ takové, že pro každé dva body x, y z X máme

$$r \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq s \cdot d_1(x, y),$$

jsou d_1 a d_2 ekvivalentní metriky. Například všechny metriky d_∞ a d_p na $\mathbf{R}^n$ v příkladu z 1. přednášky jsou ekvivalentní, protože platí nerovnosti

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq n^{1/p} d_\infty(x, y).$$

Podobně z nerovností $(a, b \geq 0)$

$$\max(a, b) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq 2 \max(a, b)$$

plyne, že všechny tři součinové metriky jsou ekvivaletní.

Nechť $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$ jsou topologie. Řekneme, že $(X_1, \mathcal{T}_1)$ je *podprostorem* $(X_2, \mathcal{T}_2)$, pokud $X_1 \subset X_2$ a

$$\mathcal{T}_1 = \{X_1 \cap A \mid A \in \mathcal{T}_2\}.$$

Řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je *součinem* $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$, pokud $X = X_1 \times X_2$ a topologie $\mathcal{T}$, zvaná *součinová topologie*, je dána bází

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

(viz ještě poznámku o bázi topologie v příští 3. přednášce).

Topologie $(X, \mathcal{T})$ definuje na podmnožině $Y \subset X$ *indukovanou topologii* $(Y, \mathcal{T}')$, kde $\mathcal{T}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$; $(Y, \mathcal{T}')$ je zřejmě podprostorem $(X, \mathcal{T})$. Otevřenost a uzavřenost množiny je relativní pojem, může se změnit při přechodu k nadprostoru. (Například v právě popsané situaci je Y otevřená i uzavřená množina v $(Y, \mathcal{T}')$, ale nemusí být ani jedno v nadprostoru $(X, \mathcal{T})$. Na druhou stranu, je-li $E \subset Y$ otevřená v $(X, \mathcal{T})$, je otevřená i v $(Y, \mathcal{T}')$).

Poznámky k součinu topologií. Rozmyslete si jako cvičení, že pokud v definici báze $\mathcal{B}$ součinové topologie necháme A_i probíhat místo topologie $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$, jen nějakou její bázi, dostaneme menší množinu $\mathcal{B}'$, která nicméně generuje tutéž součinovou topologii (viz ještě poznámku o bázi topologie v příští 3. přednášce). Rozmyslete si jako cvičení, že $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ bereme s euklidovskou topologií, dává euklidovskou topologii na $\mathbf{R}^2$. Obecněji, součin $\mathbf{R}^k$ a $\mathbf{R}^l$ s euklidovskými topologiemi dává (převedeme-li samozřejmě body z formátu (k-tice, l-tice) na formát $k + l$-tic) euklidovskou topologii na $\mathbf{R}^{k+l}$.

1.3. Spojitá zobrazení. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ je *spojité v bodě* $a \in X$, pokud pro každé okolí $V \in \mathcal{V}$ bodu $f(a)$ existuje okolí $U \in \mathcal{U}$ bodu a takové, že $f(U) \subset V$. Dovolíme-li V a U probíhat pouze nějaké báze příslušných topologií, dostaneme ekvivalentní definici; viz metrické prostory, kde obvyklá definice spojitosti užívá báze koulí. Zobrazení f je *spojité*, je-li spojité v každém bodě. Množina všech spojitých zobrazení mezi topologickými prostory $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ se označuje $C(X, Y)$.

Tvrzení 4. *Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ je spojité, právě když vzor každé otevřené množiny je otevřená množina, tj. $\forall V \in \mathcal{V} : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in C(X, Y)$ a $V \in \mathcal{V}$. Pokud $f(a) \in V$ pro nějaký bod a z X, existuje díky spojitosti f okolí $U_a \in \mathcal{U}$ bodu a takové, že $f(U_a) \subset V$, to jest $U_a \subset f^{-1}(V)$. Potom máme

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{f(a) \in V} U_a$$

a $f^{-1}(V)$ je otevřená množina, protože je sjednocením otevřených množin. (Pokud žádné a s $f(a) \in V$ neexistuje, je $f^{-1}(V) = \emptyset$ rovněž otevřená množina.)

Implikace $\Leftarrow$. Nechť $f(a) \in V \in \mathcal{V}$. Podle předpokladu je $U = f^{-1}(V)$ otevřená množina a zřejmě $a \in U$. Takže U je okolí a a $f(U) \subset V$ (dokonce $f(U) = V$). Zobrazení f je spojité v každém bodě a tedy spojité. $\square$

Tvrzení 5. *Nechť $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = f \circ g : X \to Z$ jsou zobrazení mezi topologickými prostory $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ a $(Z, \mathcal{W})$. 1. Jsou-li f*

a g spojitá zobrazení, je i h spojité. 2. *Je-li f spojité v bodě $a \in X$ a g v bodě $f(a) \in Y$, je h spojité v bodě a.*

Důkaz. 1. Použijeme tvrzení 4. Nechť $W \in \mathcal{W}$ je libovolná otevřená množina. Patrně $h^{-1}(W) = f^{-1}(V)$, kde $V = g^{-1}(W)$. Díky spojitosti g máme $V \in \mathcal{V}$ a díky spojitosti f máme $h^{-1}(W) = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, takže h je spojité.

2. Nechť $W \in \mathcal{W}$ je okolí bodu $h(a) = g(f(a))$. Podle předpokladu o f a g máme okolí $V \in \mathcal{V}$ bodu $f(a)$ takové, že $g(V) \subset W$, a tedy i okolí $U \in \mathcal{U}$ bodu a takové, že $f(U) \subset V$. Pak $h(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$. □

Bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) $f: X \to Y$ mezi topologickými prostory $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ se nazývá *homeomorfismus*, pokud f i f^{-1} jsou spojitá zobrazení. Topologické prostory, mezi nimiž existuje homeomorfismus, jsou *homeomorfní*, to jest nerozlišitelné, izomorfní.

Příklady. 1. Topologické prostory $X = (0,1)$ a $Y = \mathbf{R}$ (s euklidovskou topologií) jsou homeomorfní, například prostřednictvím zobrazení

$$f: X \to Y, \; f(x) = \tan(\pi(x - \tfrac{1}{2})).$$

2. Nechť $X = [0, 2\pi)$ a $Y = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ (jednotková kružnice v rovině), s euklidovskou topologií indukovanou z $\mathbf{R}$, resp. z $\mathbf{R}^2$, a nechť

$$f: X \to Y, \; f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

(interval X "navineme" na kružnici Y). Pak f je bijekce a je to spojité zobrazení, ale inverz f^{-1} není spojité zobrazení (proč?), takže f není homeomorfismus. Ve skutečnosti oba topologické prostory ani homeomorfní nejsou, podstatně se odlišují (X není kompaktní, Y je).

1.4. Kompaktní prostory. *Otevřené pokrytí* podmnožiny $E \subset X$ v topologickém prostoru $(X,\mathcal{U})$ je systém otevřených množin $O = \{A_i \in \mathcal{U} \mid i \in I\}$ takový, že

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supset E.$$

Řekneme, že O má *konečné podpokrytí*, když existuje konečná podmnožina $J \subset I$ taková, že stále

$$\bigcup_{i \in J} A_i \supset E.$$

Množina $E \subset X$ je *kompaktní*, pokud její každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. Celý prostor $(X,\mathcal{U})$ je *kompaktní*, je-li X (jako podmnožina X) kompaktní.

Dokažte si jako cvičení, že podmnožina $E \subset X$ je kompaktní v $(X,\mathcal{U})$, právě když indukovaný topologický (pod)prostor $(E,\mathcal{U}')$ je kompaktní. Kompaktnost je tedy absolutní vlastnost.

Příklady. 1. Nechť $E = (0,1)$ a $X = \mathbf{R}$ (s euklidovskou topologií). Otevřené pokrytí E intervaly

$$O = \{(\tfrac{1}{2},1),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}),\ (\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8}),\ (\tfrac{1}{16},\tfrac{3}{16}),\ \ldots\}$$

nemá konečné podpokrytí (nelze vypustit ani jeden interval) a E tedy není kompaktní. Podobně ani celé $\mathbf{R}$ není kompaktní kvůli otevřenému pokrytí

$$O = \{\ldots,\ (-4,-2),\ (-3,-1),\ (-2,0),\ (-1,1),\ \ldots\}.$$

2. Interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je kompaktní podmnožina, stejně jako jednotková kružnice v rovině (s indukovanou euklidovskou topologií). To plyne z obecné charakterizační věty o kompaktních podmnožinách euklidovského prostoru $\mathbf{R}^n$, kterou zanedlouho dokážeme.

Tvrzení 6. *V hausdorffovské topologii $(X,\mathcal{U})$ je každá kompaktní podmnožina $E \subset X$ uzavřená.*

Dokážeme příště.

3. přednáška 18. října 2005

Tvrzení 6. *V hausdorffovské topologii* $(X,\mathcal{U})$ *je každá kompaktní podmnožina* $E \subset X$ *uzavřená.*

Důkaz. Stačí dokázat, že každý bod $a \in X \backslash E$ má okolí U_a disjunktní s E. (Pak je jasné, že E je uzavřená, protože $X \backslash E = \bigcup_{a \in X \backslash E} U_a$ je otevřená.) Z hausdorffovosti prostoru $(X,\mathcal{U})$ plyne, že body $a \in X \backslash E$ a $e \in E$ mají disjunktní okolí U_e a V_e: $a \in U_e \in \mathcal{U}$, $e \in V_e \in \mathcal{U}$, $U_e \cap V_e = \emptyset$. Máme otevřené pokrytí $E \subset \bigcup_{e \in E} V_e$. Z kompaktnosti množiny E plyne, že už konečně mnoho jejích bodů $e_1, e_2, \ldots, e_r$ stačí k pokrytí okolími V_e:

$$E \subset V_{e_1} \cup V_{e_2} \cup \ldots \cup V_{e_r} = V_E.$$

Položíme

$$U_a = U_{e_1} \cap U_{e_2} \cap \ldots \cap U_{e_r}.$$

U_a je okolí a a $U_a \cap V_{e_i} = \emptyset$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, r$, protože $U_a \subset U_{e_i}$ a $U_{e_i} \cap V_{e_i} = \emptyset$. Tedy $U_a \cap V_E = \emptyset$ a $U_a \cap E = \emptyset$. □

Kompaktní množina v metrickém prostoru je tedy vždy uzavřená.

Vraťme se ještě k zadání topologie pomocí báze. Je-li X množina a $\mathcal{B} \subset \exp(X)$ systém jejích podmnožin, definujeme

$$G(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\},$$

tj. $G(\mathcal{B})$ se sestává z množin, které lze získat jako sjednocení množin z $\mathcal{B}$, např. $\mathcal{B} \subset G(\mathcal{B})$. Za jakých podmínek je $(X, G(\mathcal{B}))$ topologie ($\mathcal{B}$ pak je její bází)?

Lemma. *$(X, G(\mathcal{B}))$ je topologický prostor, právě když systém $\mathcal{B}$ splňuje dvě podmínky: (i) $X \in G(\mathcal{B})$ (ekvivalentně řečeno, $\bigcup \mathcal{B} = X$) a (ii) pokud $A, B \in \mathcal{B}$, potom $A \cap B \in G(\mathcal{B})$.*

Důkaz. Dokažte jako cvičení. □

Těmto dvěma podmínkám budeme říkat *podmínky báze.* Součinovou topologii $\mathcal{W}$ na $X \times Y$ vzniklou součinem topologií $(X,\mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ jsme definovali jako $\mathcal{W} = G(\mathcal{B})$, kde $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. Podle lemmatu je tato definice korektní, protože $\mathcal{B}$ splňuje podmínky báze: máme dokonce $X \times Y \in \mathcal{B}$ a pro $U \times V, U' \times V' \in \mathcal{B}$ máme též

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') \in \mathcal{B}.$$

Věta 7. *Kompaktnost se zachovává při následujících operacích.*
1. *Přechod k uzavřenému podprostoru.*
2. *Obraz spojitým zobrazením.*
3. *Kartézský součin.*

Důkaz. (Na přednášce jsem ho nestihl, je ponechán k vlastnímu studiu z toho textu.) 1. Dokážeme implikaci

$$(X, \mathcal{U}) \text{ je kompaktní a } K \subset X \text{ je uzavřená} \Rightarrow K \text{ je kompaktní.}$$

Nechť $O = \{A_i \in \mathcal{U} \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí množiny K. Pak

$$\{B_i \in \mathcal{U} \mid i \in I\}, \quad \text{kde } B_i = A_i \cup (X \backslash K),$$

je otevřené pokrytí celého prostoru X. Vybereme konečné podpokrytí dané podmnožinou $J \subset I$ (X je kompaktní):

$$\bigcup_{i \in J} B_i = X.$$

Potom $\bigcup_{i \in J} A_i \supset K$ (složka $X \backslash K$ množiny B_i je disjunktní s K) a J dává konečné podpokrytí pokrytí O.

2. Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi dvěma topologiemi $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$. Dokážeme implikaci

$$(X, \mathcal{U}) \text{ je kompaktní} \Rightarrow f(X) \text{ je kompaktní podmnožina } Y.$$

Nechť $O = \{B_i \in \mathcal{V} \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí množiny $f(X)$. Množiny $A_i = f^{-1}(B_i)$, $i \in I$, jsou otevřené (podle tvrzení 4) a tvoří pokrytí prostoru X. Vybereme konečné podpokrytí dané podmnožinou $J \subset I$ (X je kompaktní):

$$X = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

Potom $f(X) = \bigcup_{i \in J} f(A_i) \subset \bigcup_{i \in J} B_i$ a J dává konečné podpokrytí pokrytí O.

3. Dokážeme implikaci

$$(X,\mathcal{U}) \text{ a } (Y,\mathcal{V}) \text{ jsou kompaktní} \Rightarrow \text{součin } (X \times Y, \mathcal{W}) \text{ je kompaktní.}$$

Nechť $O = \{A_i \in \mathcal{W} \mid i \in I\}$ je otevřené pokrytí součinu $X \times Y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A_i jsou z báze součinové topologie, $A_i = U_i \times V_i$ pro nějaká $U_i \in \mathcal{U}$, $V_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$ (proč?). Definujeme

$$S_a = \{a\} \times Y, \ a \in X.$$

Součinová topologie $\mathcal{W}$ indukuje na $S_a \subset X \times Y$ topologii homeomorfní prostoru $(Y, \mathcal{V})$ (Y a S_a jsou homeomorfní prostřednictvím zobrazení $y \mapsto (a, y)$). S_a je tedy kompaktní podmnožina v $(X \times Y, \mathcal{W})$ a existuje konečná množina $J(a) \subset I$ taková, že

$$S_a \subset \bigcup_{i \in J(a)} A_i = \bigcup_{i \in J(a)} U_i \times V_i.$$

Odtud plyne, že $\bigcup_{i \in J(a)} V_i = Y$. Množina

$$U(a) = \bigcap_{i \in J(a)} U_i \subset X$$

je okolí bodu a obsažené v každé množině U_i, $i \in J(a)$. Dostáváme, že

$$U(a) \times Y = U(a) \times \left(\bigcup_{i \in J(a)} V_i \right) = \bigcup_{i \in J(a)} U(a) \times V_i \subset \bigcup_{i \in J(a)} U_i \times V_i.$$

Z otevřeného pokrytí $\{U(a) \mid a \in X\}$ kompaktního prostoru X vybereme konečné podpokrytí určené body $a_1, a_2, \ldots, a_r \in X$. Dostáváme, že

$$X \times Y = \left(\bigcup_{i=1}^{r} U(a_i) \right) \times Y = \bigcup_{i=1}^{r} U(a_i) \times Y = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j \in J(a_i)} U_j \times V_j.$$

Vidíme, že množina $J = J(a_1) \cup J(a_2) \cup \ldots \cup J(a_r)$ určuje konečné podpokrytí pokrytí O. □

Věta 8. *Metrický prostor (M, d) je kompaktní, právě když každá posloupnost bodů v M má konvergentní podposloupnost.*

Vlastnosti, že v daném metrickém prostoru má každá posloupnost konvergentní podposloupnost, budeme říkat *vlastnost P*. Podmnožina $E \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je *ε-síť*, pokud

$$\forall x \in M \ \exists y \in E : \ d(x, y) < \varepsilon.$$

Potom patrně $M = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$.

Lemma. *Když má metrický prostor (M, d) vlastnost P, potom v něm pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť.*

Důkaz. Nechť (M, d) nemá konečnou r-síť. Zvolme $x_1 \in M$ libovolně. Protože $\{x_1\}$ není r-síť, existuje takový bod $x_2 \in M$, že $d(x_1, x_2) \geq r$. Podobně existuje $x_3 \in M$ takový, že $d(x_i, x_3) \geq r$ pro $i = 1, 2$, a tak dále. Takto sestrojíme nekonečnou posloupnost bodů (x_n) v M s vlastností, že $d(x_i, x_j) \geq r$ pro všechna $1 \leq i < j$. Z této posloupnosti nelze vybrat konvergentní podposloupnost—(M, d) nemá vlastnost P. $\square$

Důkaz věty 8. Implikace $\Leftarrow$. Předpokládáme, že (M, d) má vlastnost P a že má otevřené pokrytí O, které nemá konečné podpokrytí, a odvodíme spor. Pro $n = 1, 2, \ldots$ uvážíme konečné $1/n$-sítě S_n (které existují podle lemmatu). Kdyby každá koule v $\{B(x, 1/n) \mid x \in S_n\}$ byla obsažena v nějaké množině z O, z konečnosti S_n a z $M = \bigcup_{x \in S_n} B(x, 1/n)$ by plynulo, že O má konečné podpokrytí. Takže existuje takový bod $x_n \in S_n$, že koule $B(x_n, 1/n)$ není obsažena v žádné množině $U \in O$. Podle vlastnosti P má posloupnost (x_n) konvergentní podposloupnost. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že už samotná (x_n) konverguje a $\alpha \in M$ je její limita:

$$x_n \to \alpha.$$

Pak $\alpha \in U$ pro nějakou množinu U z O, a tedy $B(\alpha, r) \subset U$ pro nějaké $r > 0$ (U je otevřená). Vezmeme $N \in \mathbf{N}$ tak veliké, že $x_N \in B(\alpha, r/2)$ a $1/N < r/2$. Díky trojúhelníkové nerovnosti

$$B(x_N, 1/N) \subset B(\alpha, r) \subset U,$$

což je spor.

Implikace $\Rightarrow$. Ukážeme, že v kompaktním metrickém prostoru (M, d) má každá posloupnost $(x_n) \subset M$ konvergentní podposloupnost. Řekneme, že $a \in M$ je limitním bodem posloupnosti (x_n), když pro každé $r > 0$ je množina

$\{n \in \mathbf{N} \mid d(x_n, a) < r\}$ nekonečná. Pokud posloupnost (x_n) má limitní bod a, dá se z ní snadno vybrat podposloupnost konvergující k a a jsme hotovi. Budeme předpokládat, že (x_n) nemá žádný limitní bod a odvodíme spor. Pro každý bod a z M tedy existuje $r_a > 0$ takové, že množina

$$I(a) = \{n \in \mathbf{N} \mid x_n \in B(a, r_a)\}$$

je konečná. Z pokrytí $\{B(a, r_a) \mid a \in M\}$ prostoru M vybereme konečné podpokrytí dané body $a_1, a_2, \ldots, a_t$. Protože množina

$$I = I(a_1) \cup I(a_2) \cup \ldots \cup I(a_t) \subset \mathbf{N}$$

je konečná, $I \neq \mathbf{N}$ a můžeme zvolit číslo $N \in \mathbf{N} \backslash I$. Pak $x_N \notin B(a_i, r_{a_i})$ pro $i = 1, 2, \ldots, t$ a

$$x_N \notin \bigcup_{i=1}^{t} B(a_i, r_{a_i}) = M,$$

což je spor. $\square$

Příklady. 1. Jak víme z Matematické analýzy I, každá posloupnost (x_n) v intervalu $[a, b] \subset \mathbf{R}$, kde $-\infty < a \leq b < \infty$, má podposloupnost konvergující k limitě ležící v $[a, b]$. Podle věty 8 je tedy interval $[a, b]$ kompaktní podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{R}$.

2. Odtud a s pomocí 3 věty 7 dostáváme, že každý kvádr

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

kde $[a_i, b_i]$ jsou kompaktní intervaly v $\mathbf{R}$, je kompaktní podmnožina $\mathbf{R}^n$.

Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je *omezená*, když existuje koule B v M, která X obsahuje. Posloupnost $(x_n) \subset M$ *jde k nekonečnu*, když pro nějaký bod a platí $\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) \to \infty$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pak platí $\lim_{n\to\infty} d(b, x_n) \to \infty$ pro každý bod b z M. Posloupnost (x_n) jdoucí k nekonečnu není konvergentní a každá její podposloupnost jde k nekonečnu, (x_n) tedy nemá konvergentní podposloupnost. Když je množina $X \subset M$ neomezená, obsahuje posloupnost jdoucí k nekonečnu (vezmeme libovolně $x_n \in X \backslash B(a, n)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a libovolný pevný bod a) a podle věty 8 není kompaktní. Kompaktní podmnožina tedy musí být omezená. Také víme (z tvrzení 6), že kompaktní podmnožina musí být uzavřená. Shrnuto, pro množinu X v metrickém prostoru máme implikaci

$$X \text{ je kompaktní} \Rightarrow X \text{ je uzavřená a omezená.}$$

V euklidovských prostorech platí i opačná implikace.

Věta 9. *Podmnožina euklidovského prostoru* $\mathbf{R}^n$ *je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*

Důkaz. Víme, že implikace $\Rightarrow$ platí pro každý metrický prostor. Nechť naopak $X \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená a omezená. Z omezenosti plyne, že $X \subset K = [0,a]^n$ pro nějaké $a > 0$. Krychle K je kompaktní (viz příklad 2) a (třeba podle tvrzení 6) uzavřená. Množina X je uzavřená v $\mathbf{R}^n$, je tedy uzavřená i jako podmnožina K a proto kompaktní jako podmnožina K (podle 1 věty 7). Odtud plyne, že X je kompaktní i jako podmnožina $\mathbf{R}^n$. □

Následující dva příklady však ukazují, že obecně opačná implikace neplatí.

Příklady. 1. (Příklad p. Heinze.) Nechť M je nekonečná množina a (M,d) je diskrétní metrický prostor: $d(x,x) = 0$ a $d(x,y) = 1$ pro $x \neq y$. Pak M je uzavřená a omezená množina ($B(a,2) = M$ pro každý bod a), ale jakákoli posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ složená ze vzájemně různých prvků nemá konvergentní podposloupnost, protože $d(x_m, x_n) = 1$ pro $m \neq n$, a (M,d) není kompaktní.

2. Nechť $M = C(0,1)$ s maximovou metrikou a f_0 označuje identicky nulovou funkci. Uzavřená jednotková koule $\overline{B}(f_0,1)$ v M je uzavřená a omezená množina, ale posloupnost funkcí (f_n) z $\overline{B}(f_0,1)$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 2^{-n-1} \\ 2 - 2^{n+1}x & \text{pro } 2^{-n-1} \leq x \leq 2^{-n} \\ 0 & \text{pro } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

nemá konvergentní podposloupnost, protože, opět,

$$d(f_m, f_n) = \max_{x \in [0,1]} |f_m(x) - f_n(x)| = 1$$

pro každé dva indexy $m \neq n$.

Partii o kompaktnosti zakončíme přehledem důležitých vlastností spojitých zobrazení definovaných na kompaktech.

Věta 10. *Nechť* $f : X \to Y$ *je spojité zobrazení mezi topologiemi* $(X, \mathcal{U})$ *a* $(Y, \mathcal{V})$, *přičemž* $(X, \mathcal{U})$ *je kompaktní prostor.*
1. *Pokud* $Y = \mathbf{R}$, *nabývá* f *na* X *svého maxima i minima.*

2. *Je-li f bijekce a Y hausdorffovský, je inverzní zobrazení f^{-1} spojité.*
3. *Jsou-li prostory X a Y metrizovatelné, je f stejnoměrně spojité.*

Důkaz. 1. Obraz $f(X)$ je kompaktní podmnožina v $\mathbf{R}$ (podle 2 věty 7), takže je uzavřená a omezená (podle věty 9). To znamená, že $f(X)$ obsahuje své supremum a infimum a má tedy největší a nejmenší prvek.

2. Podle tvrzení 4 stačí ověřit, že vzor každé uzavřené množiny $Z \subset X$ v zobrazení f^{-1} je uzavřená podmnožina v Y. Ale $(f^{-1})^{-1}(Z) = f(Z)$ a Z je kompaktní (podle 1 věty 7), takže $f(Z)$ je kompaktní podmnožina v Y (podle 2 věty 7) a je tedy uzavřená (tvrzení 6).

3. Dokažte jako cvičení, dokazuje se úplně stejně jako stejnoměrná spojitost funkce z $C(0, 1)$. $\square$

V minulé přednášce jsme na příkladu ukázali, že část 2 pro nekompaktní X nemusí platit.

4. přednáška 25. října 2005

1.5. Souvislé prostory. Podmnožina E topologického prostoru $(X,\mathcal{U})$ je *obojetná*, když je otevřená i uzavřená; například množiny $\emptyset$ a X jsou obojetné. Topologie $(X,\mathcal{U})$ je *nesouvislá*, když obsahuje netriviální obojetnou množinu, různou od $\emptyset$ a X. Podmnožina E je *nesouvislá*, je-li podprostor indukovaný na E nesouvislý. Podmnožina nebo prostor, které nejsou nesouvislé, jsou *souvislé*. Souvislost je absolutní vlastnost, která nezávisí na podči nadprostoru: je-li $(X,\mathcal{U})$ podprostorem $(Y,\mathcal{V})$, pak $E \subset X$ je souvislá v X, právě když je souvislá v Y.

Tvrzení 11. *Nechť $(X,\mathcal{U})$ je topologický prostor.*
1. *Podmnožina $E \subset X$ je nesouvislá, právě když se dá pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami, které ji obě protínají:*

$$\exists A, B \in \mathcal{U} : \; E \subset A \cup B, A \cap B = \emptyset, A \cap E \neq \emptyset, B \cap E \neq \emptyset.$$

Totéž platí s uzavřenými množinami.
2. *Prostor $(X,\mathcal{U})$ je souvislý, právě když pro každé dva body a, b z X existuje souvislá podmnožina $E \subset X$ taková, že $a, b \in E$.*
3. *Jsou-li $E, F \subset X$ souvislé podmnožiny a $E \cap F \neq \emptyset$, potom i $E \cup F$ je souvislá.*

Důkaz. 1. Lehké cvičení na definici podprostoru.

2. Implikace $\Rightarrow$ je jasná, položíme $E = X$. Pro důkaz implikace $\Leftarrow$ předpokládejme, že prostor X má popsanou vlastnost, ale že současně je i nesouvislý, má netriviální obojetnou podmnožinu K. Zvolíme body $a \in K$, $b \in X \backslash K$ a souvislou podmnožinu $F \subset X$ obsahující a i b. Pokrytí $F \subset K \cup (X \backslash K)$ je ve sporu se souvislostí F (viz 1).

3. Nechť je množina $E \cup F$ nesouvislá: podle 1 máme $E \cup F \subset A \cup B$ pro dvě disjunktní otevřené množiny A a B, které obě protínají $E \cup F$. Protože E je souvislá, máme $E \subset A$ nebo $E \subset B$ (jinak by A i B protínaly E) a totéž platí pro F. Všechny čtyři možnosti však dávají spor: $E, F \subset A$ dává, že B neprotíná $E \cup F$ (podobně $E, F \subset B$), a $E \subset A, F \subset B$ (nebo naopak) dává, že $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Příklad. Podmnožina $E = \{-2\} \cup [2, 7)$ euklidovského prostoru $\mathbf{R}$ je nesouvislá, například

$$E \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

je pokrytí splňující 1 tvrzení 11.

Věta 12. *Podmnožina E v euklidovském prostoru $\mathbf{R}$ je souvislá, právě když je interval, to jest pro každé tři body $x < y < z$, kde $x, z \in E$, máme i $y \in E$.*

Důkaz. Dokážeme kontrapozice obou implikací, nejprve $\neg \Leftarrow \neg$. Nechť $x < y < z$ jsou tři reálná čísla, $x, z \in E$ a $y \notin E$. Položíme

$$A = (-\infty, y) \quad \text{a} \quad B = (y, \infty).$$

Pak $E \subset A \cup B$ je pokrytí, které podle 1 tvrzení 11 ukazuje nesouvislost množiny E.

Implikace $\neg \Rightarrow \neg$. Nesouvislou množinu E pokryjeme uzavřenými množinami A a B splňujícími 1 tvrzení 11 a vezmeme dva (různé) body $a \in A \cap E$ a $b \in B \cap E$. Můžeme předpokládat, že $a < b$. Pokud $[a, b] \not\subset E$, jsme hotovi (existuje bod c mezi a a b takový, že $c \notin E$). Budeme předpokládat, že $[a, b] \subset E$ a odvodíme spor. Vezmeme

$$d = \inf\{x \in [a, b] \mid x \in B\}.$$

Patrně $d \in B$ (případ $d = b \in B$ je jasný a pokud $d < b$, užijeme uzavřenost B). Ale $a \notin B$, tudíž $a < d \leq b$ a $[a, d) \subset A$. Z uzavřenosti A plyne, že $d \in A$. Tedy $d \in A \cap B$, což je spor. □

Věta 13. *Souvislost se zachovává dvěma operacemi.*
1. Obraz spojitým zobrazením.
2. Kartézský součin.

Důkaz. 1. Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi topologickými prostory $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$, přičemž X je souvislý. Ukážeme, že $f(X)$ je souvislá podmnožina v Y. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(X) = Y$. Kdyby Y byl nesouvislý prostor a dal se vyjádřit jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených množin A a B, stejné vyjádření bychom dostali pro prostor X za pomoci vzorů $f^{-1}(A)$ a $f^{-1}(B)$ (to jsou otevřené množiny podle tvrzení 4) a X by byl nesouvislý.

2. Ukážeme, že součin $(X \times Y, \mathcal{W})$ souvislých topologií $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ je souvislý. Použijeme 2 z tvrzení 11. Nechť $a = (a_X, a_Y), b = (b_X, b_Y)$ jsou dva body z $X \times Y$. Označíme $X' = X \times \{a_Y\}$ a $Y' = \{b_X\} \times Y$. Patrně $a, b \in X' \cup Y'$ a stačí dokázat souvislost množiny $X' \cup Y'$. Topologie $\mathcal{W}$ indukuje na X', resp. na Y', topologii homeomorfní prostoru $(X, \mathcal{U})$, resp.

$(Y, \mathcal{V})$, takže X' a Y' jsou souvislé podmnožiny v $X \times Y$. Protože navíc $(b_X, a_Y) \in X' \cap Y$, je množina $X' \cup Y'$ souvislá podle 3 tvrzení 11. $\square$

Důsledek 14. *Nechť* $(X, \mathcal{U})$ *je souvislý topologický prostor a* $f \in C(X, \mathbf{R})$. *Pak* $f(X)$ *je interval. Spojitá reálná funkce na souvislém topologickém prostoru má tedy Darbouxovu vlastnost, nabývá všech mezihodnot.*

Důkaz. Plyne hned z 1 věty 13 a z věty 12. $\square$

Podmnožina E topologického prostoru $(X, \mathcal{U})$ je *obloukově souvislá*, když pro každé dva její body $a, b \in E$ existuje spojité zobrazení $f : [0,1] \to E$ (kde $[0,1]$ má euklidovskou a E indukovanou topologii) takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$. Znamená to, že každé dva body z E se dají spojit křivkou ležící v E; tato křivka může sebe sama protínat. Je vidět, že obloukově souvislá množina je souvislá (podle věty 12 a 1 věty 13 je $f([0,1])$ souvislá podmnožina v E, takže E je souvislá podle 2 tvrzení 11). Na příkladu ukážeme, že souvislost je obecně slabší vlastnost než oblouková souvislost. Poté ve větě 15 popíšeme důležitou situaci, kdy ze souvislosti už oblouková souvislost vyplývá.

Příklad. Uvažme množinu $E \subset \mathbf{R}^2$ s euklidovskou topologií, definovanou jako uzávěr grafu funkce $\sin(1/x)$ na intervalu $(0,1]$:

$$E = E_1 \cup E_2 = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0,1]\}.$$

Množina E je souvislá: E_1 a E_2 jsou obloukově souvislé a tedy souvislé množiny, které jsou sice disjunktní, ale každý bod v E_1 je limitním bodem množiny E_2, což implikuje souvislost $E_1 \cup E_2$ podobně jako v 3 tvrzení 11. E však není obloukově souvislá: žádný bod v E_1 nelze spojit s žádným bodem v E_2 křivkou ležící v E (proč přesně? dokažte podrobně jako cvičení).

Věta 15. *Otevřená a souvislá podmnožina* E *v* $\mathbf{R}^n$ *je obloukově souvislá.*

Důkaz. Na E zavedeme binární relaci $\sim$: $a \sim b$, právě když se body a a b dají v E spojit křivkou. Jedná se o relaci ekvivalence. Reflexivita ($a \sim a$): vezmeme křivku $f(x) = a$ pro každé $x \in [0,1]$. Symetrie: pokud $a \sim b$ prostřednictvím křivky f, pak zřejmě i $b \sim a$ prostřednictvím křivky $g(x) = f(1-x)$. Tranzitivita: když $a \sim b$ a $b \sim c$ prostřednictvím křivek f a g, pak křivka

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{pro } 0 \leq x \leq 1/2 \\ g(2x-1) & \text{pro } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(zde se hodí, že jsme povolili sebeprůsečíky křivek—h může sebe sama protínat, i když f a g jsou prosté křivky) spojuje body a a c a leží v E, takže $a \sim c$. Každý blok $C \in E/\sim$ této ekvivalence je ale otevřená množina: když $a \in C$, pak $B(a, r) \subset E$ pro nějaké $r > 0$ (E je otevřená) a úsečka spojující libovolný bod $b \in B(a, r)$ s a leží celá v $B(a, r)$, takže $b \sim a$, $b \in C$ a $B(a, r) \subset C$. Bloky v $E/\sim$ jsou neprázdné otevřené množiny, které tvoří rozklad množiny E. Kdyby byly alespoň dva, E by se dala napsat jako disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených množin (jeden blok a sjednocení ostatních bloků) a E by byla nesouvislá. Proto je v $E/\sim$ pouze jeden blok a každé dva body v E se dají spojit křivkou ležící v E. $\square$

Jako cvičení dokažte, že věta 15 platí, i když jako křivky povolíme jen sebe sama neprotínající lomené čáry.

Příklady. 1. Uvedeme bez důkazů a podrobností dva výsledky ilustrující rozdíl mezi souvislostí a obloukovou souvislostí pro množiny v euklidovské rovině. Jako K označíme jednotkový čtverec $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$ a jako H, D, L a P označíme jeho horní, dolní, levou a pravou stranu ($H = [0, 1] \times \{1\}$ atd.). Dá se dokázat, že každé dvě obloukově souvislé množiny $A, B \subset K$ splňující $A \cap D \neq \emptyset$, $A \cap H \neq \emptyset$, $B \cap L \neq \emptyset$ a $B \cap P \neq \emptyset$ se musejí protnout, $A \cap B \neq \emptyset$. Pokud však po A a B budeme chtít jenom, aby byly souvislé, už toto tvrzení neplatí: lze sestrojit takové dvě souvislé podmnožiny čtverce K, že jedna z nich protíná horní i dolní stranu a druhá protíná levou i pravou stranu a přitom jsou disjunktní; prostupují se nějak podobně jako srážející se galaxie!

2. Souvislost a nesouvislost množin se dá použít pro důkazy nehomeomorfnosti topologických prostorů. Například euklidovské prostory $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^2$ nejsou homeomorfní, protože homeomorfismus zachovává souvislost a $\mathbf{R}$ se vypuštěním jednoho bodu rozpadne (stane se nesouvislou množinou), kdežto $\mathbf{R}^2$ nikoli.

5. přednáška 1. listopadu 2005

1.6. Úplné metrické prostory. Metrický prostor (M, d) je *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost v M je konvergentní, tj. má limitu $a \in M$.

Příklady. 1. Jak víme z Matematické analýzy I, $\mathbf{R}$ je úplný metrický prostor. Jeho podprostory $(0, 1]$ a $\mathbf{Q}$ (množina zlomků) úplné nejsou, podprostor $[-5, \infty)$ úplný je. Podobně $\mathbf{R}^n$ s euklidovskou metrikou je úplný.

2. Z Matematické analýzy II zase víme, že $C[a, b]$ s maximovou metrikou je úplný. (Cauchyovská posloupnost funkcí z $C[a, b]$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci z $C[a, b]$.) Pokud ale $C[a, b]$ vybavíme integrální metrikou, nedostaneme úplný prostor. Vezměme $a = -1, b = 1$ a posloupnost funkcí (f_n) definovanou jako

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \le x \le -n^{-1} \\ nx & \text{pro } -n^{-1} \le x \le n^{-1} \\ 1 & \text{pro } n^{-1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Patrně $(f_n) \subset C[-1, 1]$ a (f_n) je cauchyovská posloupnost, protože pro $m \le n$ máme

$$d(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\, dx \le \int_{-1/m}^{1/m} 1\, dx = 2/m.$$

Neexistuje však funkce $f \in C[-1, 1]$, pro níž by $f_n \to f$. Taková funkce f by totiž, podle definice funkcí f_n, musela být identicky -1 na intervalu $[-1, 0)$ a identicky 1 na intervalu $(0, 1]$, což je (pro spojitou funkci) nemožné.

3. Kompaktní metrický prostor je podle věty 8 vždy úplný. Naopak to obecně neplatí, $\mathbf{R}$ je úplný a nekompaktní metrický prostor.

4. Uvažme euklidovské metrické prostory $\mathbf{R}$ a $(-\pi/2, \pi/2)$ a bijekci

$$f(x) = \arctan(x) : \ \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Je to homeomorfismus, protože f i inverz $f^{-1}(x) = \tan(x) : \ (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ jsou spojitá zobrazení; f je dokonce stejnoměrně spojité. Prostory $(-\pi/2, \pi/2)$ a $\mathbf{R}$ jsou tedy nerozlišitelné jako topologické prostory. (Prakticky stejný příklad jsme uvedli na druhé přednášce.) Ovšem $\mathbf{R}$ je úplný metrický prostor, ale $(-\pi/2, \pi/2)$ nikoli. Je to způsobeno tím, že inverz f^{-1} není stejnoměrně spojitý. Uvidíme, že pokud navíc ve stejnoměrně spojitém homeomorfismu mezi metrickými prostory je i inverz stejnoměrně spojitý, pak úplnost jednoho prostoru už vynucuje úplnost druhého.

Věta 16. *Úplnost metrického prostoru se zachovává třemi operacemi.*
1. *Přechod k uzavřenému podprostoru.*
2. *Obraz prostým zobrazením f, pokud f i f^{-1} je stejnoměrně spojité.*
3. *Kartézský součin.*

Důkaz (nebyl na přednášce). 1. Nechť (M, d) je úplný metrický prostor. Pak dokonce platí ekvivalence

$$E \subset M \text{ je uzavřená množina} \iff \text{podprostor } (E, d) \text{ je úplný},$$

kterou si dokážete jako snadné cvičení.

2. Máme dokázat, že když mezi dvěma metrickými prostory (M, d) a (N, e) existuje stejnoměrně spojitá bijekce $f: M \to N$, jejíž inverz f^{-1} je též stejnoměrně spojitý, potom M je úplný, právě když N je úplný.

Nechť N je úplný a (x_n) je cauchyovská posloupnost v M. Lehce se vidí, že $(y_n) = (f(x_n))$ je cauchyovská posloupnost v N. (Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $d(a, b) < \delta$ implikuje $e(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Pro toto δ existuje $N \in \mathbf{N}$ takové, že $m, n \geq N$ implikuje $d(x_m, x_n) < \delta$. Pak z $m, n \geq N$ máme $e(y_m, y_n) = e(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.) Nechť $\beta \in N$ splňuje $y_n \to b$. Označme $\alpha = f^{-1}(\beta) \in M$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $e(a, b) < \delta$ implikuje $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) < \varepsilon$ (stejnoměrná spojitost f^{-1}). Pak, protože $y_n \to \beta$, existuje $N \in \mathbf{N}$ takové, že $n \geq N$ implikuje $e(y_n, \beta) < \delta$, a tedy $n \geq N$ implikuje $d(x_n, \alpha) = d(f^{-1}(y_n), f^{-1}(\beta)) < \varepsilon$. Takže $x_n \to \alpha$.

3. Nechť (M_1, d_1) a (M_2, d_2) jsou dva úplné metrické prostory a

$$(N, d) = (M_1 \times M_2, \sqrt{d_1^2 + d_2^2})$$

je jejich součin. Dokažte si jako cvičení, že (N, d) je rovněž úplný. $\Box$

Zobrazení $f: X \to Y$ mezi dvěma metrickými prostory (M, d) a (N, e) je *kontrahující*, pokud existuje číslo q, $0 < q < 1$, takové, že

$$\forall x, y \in M: \ e(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y).$$

Kontrahující zobrazení je zřejmě stejnoměrně spojité. *Pevným bodem* zobrazení f libovolné množiny X do sebe rozumíme bod a z X splňující $f(a) = a$. Posloupnost $(x_n) \subset X$ je *posloupností iterací* zobrazení $f: X \to X$, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_1 \in X$ je libovolný startovací bod iterací).

Věta 17 (Picardova-Banachova věta o pevném bodu). *Každé kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru (M, d) do sebe má právě jeden pevný bod. Navíc každá posloupnost $(x_n) \subset M$ iterací zobrazení f konverguje k tomuto pevnému bodu.*

Důkaz. Uvažme libovolnou posloupnost iterací (x_n) zobrazení f. Protože f je kontrahující a $x_i = f(x_{i-1})$, máme odhad

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq qd(x_{n+1}, x_n) \leq q^2 d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq q^n d(x_2, x_1).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne, že pro každé $k, n \in \mathbf{N}$ máme

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{i=1}^{k} d(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \\ &\leq d(x_2, x_1) \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-2} \\ &\leq d(x_2, x_1) \sum_{i=1}^{\infty} q^{n+i-2} \\ &= d(x_2, x_1) \frac{q^{n-1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že (x_n) je cauchyovská posloupnost. Díky úplnosti prostoru M má limitu a. Ze spojitosti f pak plyne, že a je pevným bodem f:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(a).$$

Nechť a, b jsou dva pevné body f. Pak

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq qd(a, b),$$

což vynucuje $d(a, b) = 0$ a $a = b$. $\square$

Dokažte si jako cvičení, že věta platí i za (zdánlivě) slabšího předpokladu, že kontrahující je pouze nějaká iterace $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots(f(x))))$ zobrazení f.

Jako příklad aplikace věty 17 si dokážeme (lokální) existenci a jednoznačnost řešení $y(x)$ diferenciální rovnice

$$(*) \left\{ \begin{array}{lcl} y(a) &=& b \\ y'(x) &=& f(x, y(x)). \end{array} \right.$$

Zde $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je zadaná funkce ("pravá strana rovnice") a $a, b \in \mathbf{R}$ jsou zadaná čísla. Hledáme takovou reálnou funkci $y(x)$ a takový otevřený interval I obsahující a, že $y(x)$ je na I definovaná, $y(a) = b$ (říkáme, že $y(x)$ splňuje *počáteční podmínku* $y(a) = b$) a $y(x)$ má I derivaci splňující pro každé $x \in I$ druhý vztah v (*), tj. vlastní diferenciální rovnici.

Podívejme se například na rovnici $y(1) = -3$ a $y'(x) = y(x)$; zde $a = 1, b = -3$ a $f(u, v) = v$. Funkce $y(x) = -\frac{3}{\mathrm{e}}\exp(x)$ je jejím řešením na každém otevřeném intervalu $I \ni 1$.

Věta 18 (Picardova). *Pokud $f \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ a existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbf{R}$ platí*

$$|f(u, v) - f(u, w)| \leq M|v - w|,$$

pak každý bod $a \in \mathbf{R}$ má okolí $I = (a - \delta, a + \delta)$, na němž má rovnice (*) jednoznačné řešení $y(x)$.

Důkaz (na přednášce jsem ho zvojtil). Budeme pracovat na intervalu $I = (a-\delta, a+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ a na jeho uzávěru $J = [a-\delta, a+\delta]$. Z vlastností Riemannova integrálu (výpočet Riemannova integrálu Newtonovým integrálem, Riemannův integrál jako funkce horní integrační meze) plyne, že pro spojitou funkci f je rovnice (*) ekvivalentní rovnici

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt,\ x \in I$$

(je-li $y(x)$ řešením jedné z rovnic, je řešením i druhé). Ukážeme, že pro dostatečně malé δ má na intervalu I poslední rovnice—a tedy i rovnice (*)—jednoznačné řešení $y(x)$. Pravá strana poslední rovnice definuje zobrazení A, které funkci $y(x)$ spojité na J přiřadí funkci

$$A(y(x)) = z(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Integrál je spojitou funkcí své horní integrační meze, takže funkce $z(x)$ je na J rovněž spojitá (dokonce má na J spojitou první derivaci: $z'(x) = f(x, y(x))$, ale to nebudeme potřebovat). Máme tedy zobrazení

$$A: C[a - \delta, a + \delta] \to C[a - \delta, a + \delta]$$

a potřebujeme ukázat, že A má pro dostatečně malé δ jednoznačný pevný bod, $A(y) = y$.

Pro tento účel vybavíme $C[a-\delta, a+\delta]$ maximovou metrikou $d(\cdot,\cdot)$, čímž dostaneme úplný metrický prostor (viz příklad 2), a použijeme větu 17. Ukážeme, že pro dostatečně malé δ je A kontrahující zobrazení. Nechť $y(x)$ a $z(x)$ jsou dvě funkce z $C[a-\delta, a+\delta]$. Pak

$$\begin{aligned}
d(A(y), A(z)) &= \max_{x\in J} |A(y)(x) - A(z)(x)| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x f(t, y(t))\, dt - \int_a^x f(t, z(t))\, dt \right| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x M|y(t) - z(t)|\, dt \right| \\
&\le \max_{x\in J} \left| \int_a^x M \max_{t\in J} |y(t) - z(t)|\, dt \right| \\
&= \max_{x\in J} \left| \int_a^x M d(y, z)\, dt \right| \\
&= M\delta d(y, z).
\end{aligned}$$

Zvolíme-li $\delta \le \frac{1}{2M}$, máme $d(A(y), A(z)) \le \frac{1}{2} d(y, z)$ pro libovolné dvě funkce z $C[a-\delta, a+\delta]$ a zobrazení A je kontrahující. Podle věty 17 má jednoznačný pevný bod a věta 18 je dokázána. □

Když reálná funkce dvou proměnných $f(u, v)$ splňuje pro nějakou konstantu $M > 0$ na množině $D \subset \mathbf{R}^2$ podmínku věty 18, to jest

$$|f(u, v) - f(u, w)| \le M|v - w|,\ \forall\, (u, v), (u, w) \in D,$$

řekneme, že f je na D *lipschitzovská* nebo že na D splňuje *Lipschitzovu podmínku* (pro druhou proměnnou). Funkce $f(u, v) = v$ z příkladu před větou 18 je lipschitzovská na celém $\mathbf{R}^2$, třeba s konstantou $M = 1$. Funkce $b\exp(-a)\exp(x)$ je proto pro každé $a, b \in \mathbf{R}$ jednoznačným lokálním řešením diferenciální rovnice $y(a) = b$, $y'(x) = y(x)$.

Podmínka lipschitzovskosti na celém $\mathbf{R}^2$ je zbytečně silná a v praxi mnohdy není splněna. Stačí však její lokální splnění. Dokažte si jako cvičení, že věta 18 platí i za tohoto slabšího předpokladu: existuje $h > 0$ takové, že f je na čtverci $(a-h, a+h) \times (b-h, b+h)$ spojitá a lipschitzovská.

Kapitola 2 — diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných

2.1. Velmi stručně o normovaných prostorech a prostorech se skalárním součinem. *Normovaný vektorový prostor* (NVP) je vektorový prostor X nad tělesem $\mathbf{R}$, který je vybaven zobrazením $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}$, zvaným *norma*, splňujícím tři axiomy (pro všechny $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbf{R}$):

a) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (positivní definitnost),
b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogenita) a
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Normovaný vektorový prostor je přirozeným způsobem i metrickým prostorem: funkce $d(x, y) := \|x - y\|$ je metrika (ověřte jako cvičení). Protože se zrodila z normy, je translačně invariantní: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$. *Banachův prostor* [3] je úplný NVP, tj. odvozená metrika je úplná.

Metriky $d_p(\cdot, \cdot)$ na $\mathbf{R}^n$, pro $p \geq 1$ a $p = \infty$ (viz 1. přednáška), jsou odvozeny z norem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \text{ resp. } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Podobně i pro analogické metriky na prostoru spojitých funkcí $C[a, b]$.

[3] Nazvaný podle polského matematika Stefana Banacha (1892–1945).

6. přednáška 8. listopadu 2005

Vektorový prostor se skalárním součinem (VPSS) je vektorový prostor X nad tělesem $\mathbf{R}$, který je vybaven zobrazením $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbf{R}$, zvaným *skalární součin*, splňujícím tři axiomy (pro všechny $x, x', y \in X$ a $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$):

a) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$ (positivní definitnost),
b) $\langle \kappa x + \lambda x', y\rangle = \kappa\langle x, y\rangle + \lambda\langle x', y\rangle$ (bilinearita) a
c) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (symetrie).

Na rozdíl od metriky a normy může skalární součin nabývat záporných hodnot. Příkladem VPSS je euklidovský prostor $\mathbf{R}^m$ se skalárním součinem

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m$$

nebo prostor $C[a, b]$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Věta 1 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). *Ve VPSS X pro každé dva vektory $x, y \in X$ platí nerovnost*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Rovnost nastává, právě když je jeden z vektorů skalárním násobkem druhého: $x = \lambda y$ pro $\lambda \in \mathbf{R}$.

Důkaz. Byl v Lineární algebře, proto ho zde neuvádíme. $\square$

Na každém VPSS máme i normu: uvažme zobrazení

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

První dva axiomy normy jsou zřejmě splněny. Trojúhelníková nerovnost plyne z věty 1:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad &\Longrightarrow \quad \langle x, y\rangle \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} \\
&\iff \quad \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2 \\
&\iff \quad \langle x + y, x + y\rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2 \\
&\iff \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Hilbertův prostor [4] je úplný VPSS, tj. odvozená metrika

$$d(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

je úplná.

Každý vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je normovaným vektorovým prostorem ($\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$), tedy i metrickým prostorem ($d(x,y) = \|x-y\|$) a tedy i topologickým prostorem.

2.2. Lokální lineární aproximace funkcí více proměnných. Budeme pracovat v euklidovském VPSS $\mathbf{R}^m$ s normou

$$|x| = \|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}.$$

Nechť $D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, $f : D \to \mathbf{R}$ je funkce a $a \in D$ je bod. *Derivace funkce f v bodě a ve směru* $v \in \mathbf{R}^m$, $v \neq 0$, nebo také *směrová derivace*, je limita

$$\mathrm{D}_v f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

(pokud existuje). Představte si D jako oblast v třírozměrném euklidovském prostoru, jejíž teplotu měří funkce f a kterou prolétá bodem a po přímočaré dráze, s vektorem rychlosti v, nějaká částice. Směrová derivace $\mathrm{D}_v f(a)$ pak udává okamžitou změnu teploty částice v okamžiku, kdy se nachází v bodu a.

Parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i je směrová derivace $D_{e_i} f(a)$, kde e_i je i-tý vektor kanonické báze, tj.

$$e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots,0)$$

s 1 na i-tém místě; značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Explicitně,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_m) - f(a_1,a_2,\ldots,a_m)}{h}.$$

[4] Nazvaný podle německého matematika Davida Hilberta (1862–1943).

Když má f parciální derivaci podle x_i v každém bodě D, dostáváme funkci $\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \to \mathbf{R}$. Vektor hodnot všech parciálních derivací funkce f v bodě a je *gradient* funkce f v a,

$$\nabla f(a) := (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_m}(a)).$$

Počítat parciální derivace umíme, při výpočtu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou všechny proměnné kromě x_i konstanty a f derivujeme jako funkci jediné proměnné x_i. Například

$$\frac{\partial(x^3 y \sin(yz) + x \log z)}{\partial y} = x^3(\sin(yz) + zy\cos(yz)).$$

Řekneme, že funkce f má v bodě a *(totální) diferenciál* nebo že f je v a *diferencovatelná*, pokud existuje lineární zobrazení $L: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ takové, že

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Toto lineární zobrazení L nazýváme *diferenciálem* a značíme $\mathrm{D}f(a)$; jeho hodnota $L(h)$ na vektoru h pak je $\mathrm{D}f(a)(h)$.

Přepis definic směrové derivace, parciální derivace a diferenciálu dává lokální aproximace přírůstku funkční hodnoty lineárními výrazy v přírůstku argumentu:

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= f(a) + \mathrm{D}_v f(a) \cdot t + o(t) \\ f(a+te_i) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot t + o(t) \\ f(a+h) &= f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

V prvních dvou rovnicích je t reálné číslo, $t \to 0$, a aproximace platí pouze pro argumenty funkce f ležící na přímce jdoucí bodem a ve směru v, resp. ve směru i-té souřadnicové osy. Ve třetí rovnici h probíhá $\mathbf{R}^m$, $\|h\| \to 0$, a aproximace platí pro všechny argumenty funkce f (rozumnou aproximaci ovšem dostaneme jen v nějakém malém okolí bodu a). Diferencovatelnost je daleko silnější požadavek na f než požadavek existence směrových nebo parciálních derivací.

Příklady. 1. Funkce $f = f(x,y): \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definovaná jako 1 na množině $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2, x \neq 0\}$ a jako 0 pro všechny zbylé body roviny má v počátku všechny směrové derivace (jsou rovné nule), ale není tam spojitá.

2. Podobně, definujeme-li f jako 1 na souřadnicových osách, tj. na množině $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ xy = 0\}$, a jako 0 pro všechny zbylé body roviny, má f v počátku obě parciální derivace (jsou rovné nule), ale kromě nich už žádnou další směrovou derivaci.

3. Vraťme se k příkladu s částicí z definice směrové derivace. Předpokládejme, že funkce $f : \ D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a třeba $m = 3$) je diferencovatelná v $a \in D$ a představujme si ji zase jako teplotu bodů oblasti prostoru D. Bodem a prolétá částice po křivočaré dráze $\gamma : \ [0, 1] \to D$, kde $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_i : \ D \to \mathbf{R}$, $\gamma(u) = a$ (částice je v a v čase $u \in (0, 1)$) a všechny funkce γ_i mají v u vlastní derivaci. V okamžiku, kdy se částice nachází v bodě a, má vektor rychlosti

$$v = (\gamma_1'(u), \gamma_2'(u), \ldots, \gamma_m'(u)).$$

Jaká je v této chvíli její okamžitá změna teploty? Pro $t \to 0$ a $1 \le i \le m$ máme

$$\gamma_i(u + t) = \gamma_i(u) + \gamma_i'(u)t + o(t),$$

což dává $\gamma(u + t) = \gamma(u) + tv + \alpha(t) = a + tv + \alpha(t)$, kde $\|\alpha(t)\| = o(t)$. Pro $h \in \mathbf{R}^m$, $\|h\| \to 0$, máme $f(a + h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)$, kde $\beta(h) = o(\|h\|)$. Takže, pro $t \to 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(\gamma(u+t)) - f(\gamma(u))}{t} &= \frac{f(a) + \mathrm{D}f(a)(tv + \alpha(t)) + \beta(tv + \alpha(t)) - f(a)}{t} \\
&= \frac{t\mathrm{D}f(a)(v) + \mathrm{D}f(a)(\alpha(t)) + \beta(tv + \alpha(t))}{t} \\
&= \mathrm{D}f(a)(v) + \mathrm{D}f(a)(\tfrac{1}{t}\alpha(t)) + \frac{\beta(tv + \alpha(t))}{t} \\
&= \mathrm{D}f(a)(v) + o(1).
\end{aligned}$$

Okamžitá změna teploty se tedy rovná $\mathrm{D}f(a)(v)$ a je stejná pro všechny dráhy částice, na nichž má v bodě a vektor rychlosti v.

Pojem diferenciálu rozšíříme na obecnější situaci, kdy $f : \ D \to \mathbf{R}^n$ ($D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina) je zobrazení dané n-ticí reálných funkcí: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a $f_i : \ D \to \mathbf{R}$. Řekneme, že zobrazení f má v bodě a *diferenciál* nebo že tam je *diferencovatelné*, existuje-li lineární zobrazení $L : \ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ takové, že

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Lineární zobrazení L značíme $\mathrm{D}f(a)$. Z aproximačního pohledu to opět znamená, že $f(a+h) = f(a)+\mathrm{D}f(a)(h)+\alpha(h)$, kde pro $\|h\| \to 0$ máme $\|\alpha(h)\| = o(\|h\|)$. Diferenciál je určen jednoznačně: kdyby K a L byly dva různé diferenciály zobrazení f v bodě a, pak $K(v) - L(v) = c$ je nenulový vektor pro nějaký nenulový vektor $v \in \mathbf{R}^m$ a tedy $\|K(tv) - L(tv)\| = \|tc\| = |t| \cdot \|c\|$ pro každé $t > 0$, což je ve sporu s $\|K(h) - L(h)\| = o(\|h\|)$ pro $\|h\| \to 0$.

Tvrzení 2. *Nechť $D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, $a \in D$ je bod a $f : D \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení.*
1. *Zobrazení f je diferencovatelné v a, právě když každá z n souřadnicových funkcí f_i je diferencovatelná v a. Navíc*

$$\mathrm{D}f(a) = (\mathrm{D}f_1(a), \mathrm{D}f_2(a), \ldots, \mathrm{D}f_n(a)).$$

2. *Je-li zobrazení f diferencovatelné v a, je v a spojité.*
3. *Nechť $n = 1$, tj. f je reálná funkce o m proměnných, a f je diferencovatelná v a. Pak f má v a všechny parciální derivace a jejich hodnoty určují diferenciál:*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f(a)(h) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)h_m \\ &= \langle \nabla f(a), h \rangle. \end{aligned}$$

Funkce f má v a rovněž všechny směrové derivace a platí $\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{D}f(a)(v)$.

Důkaz. 1. Cvičení na definice. Pro odhad chyby v lineárních aproximacích diferenciály si uvědomte, že pro $v \in \mathbf{R}^n$ platí $|v_i| \le \|v\| \le |v_1|+|v_2|+\cdots+|v_n|$.

2. Plyne hned z definice diferenciálu.

3. Z linearity diferenciálu $L = \mathrm{D}f(a)$ máme

$$L(h) = L(h_1e_1 + h_2e_2 + \cdots + h_me_m) = \alpha_1h_1 + \cdots + \alpha_mh_m,$$

kde $\alpha_i = L(e_i)$ (e_i je i-tý vektor kanonické báze). Ovšem, pro $t \to 0$,

$$\frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \frac{L(te_i) + o(\|te_i\|)}{t} = \alpha_i + o(1),$$

takže $\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Tvrzení o směrové derivaci plyne z její definice a z právě dokázané formule pro diferenciál. □

V obecném případu zobrazení $f: D \to \mathbf{R}^n$ je diferenciál $L = \mathrm{D}f(a): \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ reprezentován $n \times m$ maticí:

$$L(h) = \begin{pmatrix} L(h)_1 \\ L(h)_2 \\ \vdots \\ L(h)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,m} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Podle bodů 1 a 3 posledního tvrzení má tato matice v i-tém řádku gradient souřadnicové funkce f_i v bodě a, takže $l_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

Důsledek 3. *Diferenciál zobrazení $f: D \to \mathbf{R}^n$ v bodě $a \in D$, kde $D \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a f má souřadnicové funkce $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, je dán tzv.* Jacobiho maticí[5] *zobrazení f v bodě a,*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Je-li tato matice čtvercová, nazývá se její determinant *jacobiánem.*

[5] Nazvaná podle německého matematika Carla Jacobiho (1804–1851).

7. přednáška 15. listopadu 2005

Viděli jsme, že diferencovatelnost implikuje existenci parciálních derivací. Nyní dokážeme, že naopak existence parciálních derivací v okolí bodu a jejich spojitost v něm implikují diferencovatelnost.

Tvrzení 4. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je okolí bodu $a \in \mathbf{R}^m$. Pokud má funkce $f : U \to \mathbf{R}$ na U všechny parciální derivace a ty jsou v bodě a spojité, pak je f v bodě a diferencovatelná.*

Důkaz. (Na přednášce řečena jen hlavní myšlenka.) Můžeme předpokládat, že $a = \overline{0}$ je počátek souřadnic. Pro $h \in \mathbf{R}^m$, $\|h\| \to 0$, máme $\partial_i f(h) = \partial_i f(\overline{0}) + o(1)$ (spojitost $\partial_i f$ v počátku). Počátek a bod h spojuje jednoznačně určená lomená čára $s = s_1 \dots s_m$, jejíž i-tá úsečka $s_i = a_i b_i$ má směr i-té souřadnicové osy x_i:

$$a_i = (h_1, h_2, \dots, h_{i-1}, 0, 0, \dots, 0) \ \text{ a } \ b_i = (h_1, h_2, \dots, h_i, 0, 0, \dots, 0),$$

takže $a_1 = \overline{0}$, $b_i = a_{i+1}$ pro $1 \le i \le m-1$ a $b_m = h$. Na s_i se f chová jako funkce jedné proměnné x_i, s derivací rovnou $\partial_i f$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě máme

$$f(b_i) - f(a_i) = \partial_i f(\zeta_i) h_i,$$

kde ζ_i je nějaký bod ležící uvnitř s_i. Odtud

$$\begin{aligned} f(h) - f(\overline{0}) &= \sum_{i=1}^{m} f(b_i) - f(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \partial_i f(\zeta_i) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f(\overline{0}) + o(1)) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \partial_i f(\overline{0}) h_i + o(\|h\|) \end{aligned}$$

($\|h\| \le |h_1| + \cdots + |h_m|$), pročež je f diferencovatelná v počátku. □

Tvrzení 5 zobecňuje Lagrangeovu větu o střední hodnotě na funkce více proměnných a důsledek 6 zobecňuje fakt, že nulovost derivace implikuje (za jistých předpokladů) konstantnost funkce.

Tvrzení 5. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, $u = ab$ je úsečka ležící v U a funkce $f : U \to \mathbf{R}$ je spojitá na úsečce u a diferencovatelná v každém jejím bodě, s možnou výjimkou krajních bodů a a b. Pak existuje takový vnitřní bod ζ úsečky u, že*

$$f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(\zeta)(b - a).$$

Důkaz. Položíme $F(t) = f(a + th)$, kde $h = b - a$ a reálné číslo t probíhá interval $[0, 1]$. Funkce F je patrně spojitá na $[0, 1]$ a v $t \in (0, 1)$ má derivaci

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(a + th + \Delta h) - f(a + th)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathrm{D}f(a + th)(\Delta h) + o(\|\Delta h\|)}{\Delta} \\ &= \mathrm{D}f(a + th)(h). \end{aligned}$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $t_0 \in (0, 1)$ takové, že $F(1) - F(0) = F'(t_0)$. Odtud

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(t_0) = \mathrm{D}f(a + t_0 h)(h) = \mathrm{D}f(\zeta)(h),$$

kde $\zeta = a + t_0 h$. □

Důsledek 6. *Pokud reálná funkce m proměnných má v každém bodě otevřené a souvislé množiny nulový diferenciál, je na této množině konstantní.*

Důkaz. Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená a souvislá množina a funkce $f : U \to \mathbf{R}$ je v každém bodě $a \in U$ diferencovatelná a $\mathrm{D}f(a)$ je vždy nulové (lineární) zobrazení. Vezmeme dva libovolné body $a, b \in U$ a spojíme je lomenou čarou $s = s_1 s_2 \dots s_r$ ležící v U (což je možné, viz věta 15 v kapitole 1 a následující cvičení). Pro libovolnou úsečku $s_i = a_i b_i$ z s máme podle předchozího tvrzení a předpokladu o f, že

$$f(a_i) - f(b_i) = \mathrm{D}f(\zeta)(a_i - b_i) = 0$$

(zde ζ je nějaký vnitřní bod s_i), tedy $f(a_i) = f(b_i)$. Hodnoty funkce f na koncích všech úseček s_i jsou proto všechny stejné a speciálně $f(a) = f(b)$. □

Geometrie gradientu a diferenciálu. Mějme funkci $f : U \to \mathbf{R}$ o m proměnných, která je definovaná na nějakém okolí U bodu $a \in \mathbf{R}^m$. Zkoumáme její okamžité přírůstky

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

v bodě a ve směrech jednotkových vektorů $v \in \mathbf{R}^m$, $\|v\| = 1$. Zajímá nás, pro který směr je přírůstek co největší. Když je f v a diferencovatelná, pak podle tvrzení 2 a věty 1 máme

$$|\mathrm{D}_v f(a)| = |\mathrm{D}f(a)(v)| = |\langle \nabla f(a), v \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(a)\|.$$

Podle věty 1 se rovnost nabývá, právě když v je skalárním násobkem $\nabla f(a)$, to jest právě pro dva vektory

$$v^+ = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \ \text{ a } \ v^- = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}.$$

Ve směru v^+ svého normovaného gradientu tedy f roste nejrychleji a v opačném směru v^- stejnou měrou nejrychleji klesá:

$$\mathrm{D}_{v^+} f(a) = \langle \nabla f(a), v^+ \rangle = \|\nabla f(a)\| \ \text{ a } \ \mathrm{D}_{v^-} f(a) = \langle \nabla f(a), v^- \rangle = -\|\nabla f(a)\|.$$

Nyní zobecníme pojem tečny ke grafu funkce jedné proměnné na (nad)rovinu tečnou ke grafu funkce více proměnných. Pro jednoduchost značení se omezíme jen na případ tečné roviny a dvou proměnných; obecná tečná nadrovina ke grafu funkce m proměnných se zavádí analogicky.

Nechť $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbf{R}^2$, kde D je otevřená množina v rovině, a $f : D \to \mathbf{R}$ je funkce. Její graf

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

je plocha v 3-rozměrném euklidovském prostoru; P obsahuje bod (x_0, y_0, z_0), kde $z_0 = f(x_0, y_0)$. Předpokládejme, že funkce f je v bodě (x_0, y_0) diferencovatelná. Tvrdíme, že potom mezi všemi rovinami $z = L(x, y)$ (L je afinní funkce dvou proměnných), které obsahují bod (x_0, y_0, z_0), je pouze jediná splňující (pro $(x, y) \to (x_0, y_0)$) aproximaci

$$f(x, y) = L(x, y) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

totiž rovina

$$T(x, y) = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

To plyne hned z existence diferenciálu a jeho jednoznačnosti, protože zřejmě $\mathrm{D}f(x_0, y_0)(x, y) = T(x, y) - z_0$. Graf funkce $T(x, y)$,

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = T(x, y)\}$$

se nazývá *tečnou rovinou ke grafu funkce* f *v bodě* (x_0, y_0, z_0).

Rovnici tečné roviny $z = T(x, y)$ přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \ - (z - z_0) &= 0 \\ \langle V, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

kde $V \in \mathbf{R}^3$ je vektor

$$V = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

Označíme-li $X = (x, y, z)$ a $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, můžeme tečnou rovinu T definovat jako

$$T = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \langle V, X - X_0 \rangle = 0\}.$$

Je tedy tvořena právě těmi body, jejichž směrové vektory k bodu X_0 jsou kolmé na V. Vektor V se nazývá *normálovým vektorem ke grafu funkce* f *v bodě* X_0.

2.3. Počítání s diferenciály a parciálními derivacemi. Pro dvě funkce $f, g : U \to \mathbf{R}$, které jsou definované na okolí $U \subset \mathbf{R}^m$ bodu $a \in U$ a mají v bodě a i-tou parciální derivaci, máme pro i-tou parciální derivaci jejich lineární kombinace, součinu a podílu stejné vzorce jako v případě funkcí jedné proměnné (místo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ píšeme $\partial_i f$):

$$\begin{aligned} \partial_i(\kappa f + \lambda g)(a) &= \kappa \partial_i f(a) + \lambda \partial_i g(a) \\ \partial_i(fg)(a) &= g(a)\partial_i f(a) + f(a)\partial_i g(a) \\ \partial_i(f/g)(a) &= \frac{g(a)\partial_i f(a) - f(a)\partial_i g(a)}{g(a)^2} \quad \text{(pokud } g(a) \neq 0\text{).} \end{aligned}$$

Tyto vzorce fakticky jsou vzorce pro funkce jedné proměnné, protože ∂_i se počítá z funkce závisející jen na x_i.

Tvrzení 7. *Nechť* $U \subset \mathbf{R}^m$ *je otevřená množina,* $a \in U$ *a* $f, g : U \to \mathbf{R}$ *jsou dvě funkce, obě diferencovatelné v bodě* a.

1. *Pro všechny* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *je i funkce* $\kappa f + \lambda g$ *diferencovatelná v* a *a její diferenciál v* a *se rovná*

$$\kappa \mathrm{D} f(a) + \lambda \mathrm{D} g(a).$$

2. *Součinová funkce* fg *je diferencovatelná v* a *a její diferenciál v* a *se rovná*

$$g(a)\mathrm{D}f(a) + f(a)\mathrm{D}g(a).$$

3. *Pokud* $g(a) \neq 0$, *je podílová funkce* f/g *diferencovatelná v* a *a její diferenciál v* a *se rovná*

$$\frac{1}{g(a)^2}\Big(g(a)\mathrm{D}f(a) - f(a)\mathrm{D}g(a)\Big).$$

Důkaz. Tyto vzorce plynou z analogických vzorců pro parciální derivace a z 3 tvrzení 2. $\square$

Poznamenejme, že vzorec pro diferenciál lineární kombinace v 1 platí i obecněji pro zobrazení $f, g:\ U \to \mathbf{R}^n$.

V následující větě budeme skládání funkcí a zobrazení zapisovat v pořadí zprava doleva podle pořadí aplikace: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Věta 8. *Nechť*

$$f:\ U \to V,\ g:\ V \to \mathbf{R}^k$$

jsou dvě zobrazení, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ *a* $V \subset \mathbf{R}^n$ *jsou otevřené množiny. Předpokládejme, že zobrazení* f *je diferencovatelné v bodě* $a \in U$ *a* g *je diferencovatelné v bodě* $b = f(a) \in V$. *Potom složené zobrazení*

$$g \circ f = g(f):\ U \to \mathbf{R}^k$$

je diferencovatelné v bodě a *a jeho diferenciál v* a *se rovná složenině diferenciálů zobrazení* f *a* g*:*

$$\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a).$$

Speciální případ této věty ($m = 1$ a $k = 1$) jsme už vlastně dokázali na 6. přednášce v příkladu 3 o částici, takže víme, jak na to. Udělejme teď ale pořádný důkaz. (Následující pasáž až po str. 7, důkaz věty 8, z časových důvodů nebyla na přednášce.)

Pro zobrazení $z:\ U \to \mathbf{R}^n$ definované v okolí počátku $U \subset \mathbf{R}^m$ budeme psát stručně $z(x) = o(x)$ místo $\|z(x)\| = o(\|x\|)$ a $z(x) = O(x)$ místo

$\|z(x)\| = O(\|x\|)$; zde bereme vždy $x \to \overline{0}$. Značení $z(x) = o(x)$ je tedy zkratka pro

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| < \varepsilon \|x\|$$

a $z(x) = O(x)$ je zkratka pro

$$\exists c > 0\ \exists \delta > 0 :\ \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| < c\|x\|.$$

aPřipomeneme několik jednoduchých vlastností symbolů o a O, které ponecháme čtenáři jako cvičení. Pokud $z(x)$ je lineární zobrazení, pak $z(x) = O(x)$. (Tato samozřejmost obecně neplatí ve vektorových prostorech s nekonečně mnoha rozměry!) Pokud $z(x) = o(x)$, pak i $z(x) = O(x)$. Pokud máme dvě taková zobrazení $z_1, z_2 :\ U \to \mathbf{R}^n$ a $z = z_1 + z_2$, potom $(i = 1, 2)$

$$z_i(x) = o(x) \Rightarrow z(x) = o(x) \quad \text{a} \quad z_i(x) = O(x) \Rightarrow z(x) = O(x).$$

Speciálně, $z_1(x) = o(x)$ a $z_2(x) = O(x)$ implikují $z(x) = O(x)$. Obdobné vlastnosti symbolů o a O při skládání zobrazení se dokazují rovněž snadno, ale stojí za zdůraznění—jsou klíčové v důkazu věty 8.

Lemma. *Nechť* $u :\ U \to V$ *a* $v :\ V \to \mathbf{R}^k$ *jsou zobrazení, přičemž* $U \subset \mathbf{R}^m$ *a* $V \subset \mathbf{R}^n$ *jsou okolí počátků souřadnic.*
1. *Pokud* $u(x) = o(x)$ *a* $v = O(x)$*, pak* $v(u(x)) = o(x)$*.*
2. *Pokud* $u(x) = O(x)$ *a* $v(x) = o(x)$*, pak* $v(u(x)) = o(x)$*.*

Důkaz. Cvičení. □

Důkaz věty 8. V okolí počátků souřadnic máme aproximace

$$g(b+h) = g(b) + \mathrm{D}g(b)(h) + \gamma(h) \quad \text{a} \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h),$$

kde $\gamma(h)$ i $\beta(h)$ je $o(h)$. Rozdíl $f(a+h) - f(a)$ si označíme jako $\Delta(h)$. Pak $f(a+h) = f(a) + \Delta(h) = b + \Delta(h)$ a $\Delta(h) = \mathrm{D}f(a)(h) + \beta(h)$. Takže

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) &= g(f(a+h)) - g(f(a)) \\
&= \mathrm{D}g(b)(\Delta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
&= \mathrm{D}g(b)(\mathrm{D}f(a)(h)) + \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\
&= (\mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a))(h) + \alpha(h),
\end{aligned}$$

kde

$$\alpha(h) = \mathrm{D}g(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)).$$

První sčítanec definující $\alpha(h)$ je $o(h)$ podle 1 lemmatu a druhý je $o(h)$ podle 2 lemmatu. Celkem $\alpha(h) = o(h)$ a $g \circ f$ má v a diferenciál rovný lineárnímu zobrazení $\mathrm{D}g(b) \circ \mathrm{D}f(a)$. □

Z lineární algebry víme, že matice lineárního zobrazení $g \circ f$ složeného z lineárních zobrazení f a g se dostane jako součin matice zobrazení g a matice zobrazení f (v tomto pořadí). Jacobiho matice zobrazení f v bodě a je matice lineárního zobrazení $\mathrm{D}f(a)$ vzhledem ke kanonické bázi a její prvky jsou hodnoty parciálních derivací souřadnicových funkcí v bodě a (důsledek 3). Na úrovni popisu Jacobiho maticemi tak věta 8 dává následující důsledek.

Důsledek 9. *Za situace popsané v předchozí větě je Jacobiho matice složeného zobrazení $h = g \circ f$ v bodě a rovna součinu Jacobiho matice zobrazení g v bodě $b = f(a)$ a Jacobiho matice zobrazení f v bodě a:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m} &= \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(b)\right)_{i,j=1}^{k,n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_r}(b) \cdot \frac{\partial f_r}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m}. \end{aligned}$$

Speciálně pro $k = 1$, kdy funkce h o m proměnných je složeninou

$$h = g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

funkce g o n proměnných a n funkcí f_i, z nichž každá má m proměnných, dostáváme *řetízkové pravidlo* pro parciální derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \\ &= \langle \nabla g(f(a)), \partial_i f(a) \rangle, \end{aligned}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a $\partial_i f = (\partial_i f_1, \partial_i f_2, \ldots, \partial_i f_n)$.

8. přednáška 22. listopadu 2005

Věta 8 je dalekosáhlým zobecněním formule pro derivaci složené funkce jedné proměnné. V tomto okamžiku se nabízí otázka, jak to je se zobecněním formule pro derivaci inverzní funkce. Dostaneme se k němu později, vyplyne jako důsledek věty o implicitní funkci.

Příklad. Ukážeme, jak v jisté situaci řetízkové pravidlo umožňuje odvodit zákon zachování energie. Uvažme otevřenou množinu $U \subset \mathbf{R}^m$ a zobrazení $F: U \to \mathbf{R}^m$. To přiřazuje každému bodu z U vektor z $\mathbf{R}^m$ a představujeme si ho jako vektorové pole na U, které v každém bodě $a \in U$ udává směr a velikost síly působící na hmotný bod nacházející se v a. Toto silové pole může být například polem gravitační síly nějakého tělesa. Oblastí U prolétá částice po dráze $\gamma: [0,1] \to U$ plně určené polem F. Pole F určuje její pohyb prostřednictvím Newtonova zákona síly (síla = hmotnost $\times$ zrychlení):

$$F(\gamma(t)) = m\gamma''(t).$$

Zde $m > 0$ je hmotnost částice, tedy konstanta, a $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \ldots, \gamma_m''(t))$ je vektor zrychlení částice (zrychlení je okamžitá velikost změny rychlosti částice, čili druhá derivace její polohy). Předpokládejme dále, že existuje funkce $f: U \to \mathbf{R}$ taková, že má v každém bodě množiny U gradient a pro každé $a \in U$ platí

$$F(a) = -\nabla f(a).$$

Taková silová pole F se vyskytují často a říká se jim *konzervativní pole*; například pole gravitační síly je konzervativní. Fyzikové definují *potenciál* konzervativního pole F v bodě a jako $f(a)$, je to také *potenciálová energie* částice vzhledem k poli F, když se nachází v a. Dále definují *kinetickou energii* částice letící po dráze $\Gamma: [0,1] \to U$ (ne nutně určené polem F) jako

$$\tfrac{1}{2}mv(t)^2 = \tfrac{1}{2}m\Gamma'(t)^2 = \tfrac{1}{2}m\langle \Gamma'(t), \Gamma'(t)\rangle.$$

Zde $m > 0$ je hmotnost částice, $v(t)$ označuje její vektor rychlosti a kinetickou energii částice počítáme v okamžiku $t \in [0,1]$. Vyslovíme zákon zachování energie.

> V této situaci—částice o hmotnosti m se pohybuje v konzervativním silovém poli $F = -\nabla f$ po dráze $\gamma(t)$ určené Newtonovým zákonem síly—je součet potenciálové a kinetické energie částice konstantní, nezávislý na čase.

Abychom to dokázali, zderivujeme součet obou energií

$$S(t) = f(\gamma(t)) + \tfrac{1}{2}m\gamma'(t)^2$$

podle času t. S využitím řetízkového pravidla, Newtonova zákona síly a konzervativnosti silového pole F dostaneme, že

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle + m\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle + \langle \gamma'(t), m\gamma''(t)\rangle \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle + \langle \gamma'(t), F(\gamma(t))\rangle \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle + \langle \gamma'(t), -\nabla f(\gamma(t))\rangle \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle - \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tudíž $S(t) = f(\gamma(t)) + \frac{1}{2}m\gamma'(t)^2 = const.$ pro t probíhající $[0,1]$.

Pokud má funkce $f : U \to \mathbf{R}$ definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^m$ v každém jejím bodě parciální derivaci $F = \partial_i f$ a ta má má v bodě $a \in U$ parciální derivaci $\partial_j F(a) = \partial_j \partial_i f(a)$, řekneme, že f má v bodě a *parciální derivaci druhého řádu podle proměnných* x_i *a* x_j a její hodnotu značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Induktivně definujeme parciální derivace vyšších řádů: má-li f v každém bodě $x \in U$ parciální derivaci

$$F = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}}(x)$$

a ta má v bodě $a \in U$ parciální derivaci $\partial_j F(a)$, řekneme, že f má v bodě a *parciální derivaci* k*-tého řádu podle proměnných* $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_j$ a její hodnotu značíme

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a).$$

Na pořadí parciálních derivací obecně záleží, jak ukazuje příklad funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

která má v počátku obě smíšené parciální derivace druhého řádu, ale s různými hodnotami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

(spočítejte podrobně jako cvičení).

Tvrzení 10. *Nechť funkce $f : U \to \mathbf{R}$ má na okolí $U \subset \mathbf{R}^m$ bodu $a \in U$ parciální derivace druhého řádu $\partial_j \partial_i f$ a $\partial_i \partial_j f$ a obě jsou v a spojité. Potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $m = 2$ a $a = (0,0)$. Z předpokladu spojitosti $\partial_y \partial_x f$ a $\partial_x \partial_y f$ v $(0,0)$ chceme odvodit, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Díky spojitosti stačí ukázat, že pro každé $h > 0$ čtverec $K = [0,h]^2$ obsahuje body σ a τ takové, že $\partial_y \partial_x f(\tau) = \partial_x \partial_y f(\sigma)$.

Pro orientovanou úsečku $u = \alpha\beta \subset U$ a funkci $g : U \to \mathbf{R}$ označíme $g(u) = g(\alpha\beta) := g(\beta) - g(\alpha)$. Vrcholy čtverce K označíme $a = (0,0)$, $b = (0,h)$, $c = (h,0)$, $d = (h,h)$ a uvážíme číslo

$$\begin{aligned} w &= f(d) - f(b) - f(c) + f(a) \\ &= f(cd) - f(ab) = \phi(h) - \phi(0) \\ &= f(bd) - f(ac) = \psi(h) - \psi(0), \end{aligned}$$

kde $\phi(t) = f(u_t)$, $\psi(t) = f(v_t)$ a u_t, v_t jsou pro $0 \leq t \leq h$ úsečky $u_t = (t,0)(t,h)$ a $v_t = (0,t)(h,t)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě

$$\phi(h) - \phi(0) = \phi'(t_0)h = \partial_x f(u_{t_0})h$$

pro nějaké $0 < t_0 < h$. Ovšem, znovu podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě,

$$\partial_x f(u_{t_0}) = \partial_x f(t_0,h) - \partial_x f(t_0,0) = \partial_y \partial_x f(t_0,t_1)h$$

pro nějaké $0 < t_1 < h$. Pro $\tau = (t_0, t_1)$ tedy máme $w = \partial_y \partial_x f(\tau) h^2$. Stejná úvaha aplikovaná na vyjádření $w = \psi(h) - \psi(0)$ dává $w = \partial_x \partial_y f(\sigma) h^2$ pro nějaké $\sigma = (s_0, s_1)$, kde $0 < s_0, s_1 < h$. Tedy $\partial_y \partial_x f(\tau) = \partial_x \partial_y f(\sigma)$ a oba body σ a τ leží uvnitř čtverce K. □

Rovnost hodnot obou derivací lze dokázat i za slabšího předpokladu: existuje-li $\partial_x \partial_y f$ v okolí bodu a a je v něm spojitá, potom existuje i $\partial_y \partial_x f(a)$ a $\partial_y \partial_x f(a) = \partial_x \partial_y f(a)$.

Pro otevřenou množinu $U \subset \mathbf{R}^m$ označíme symbolem $C^k(U)$ množinu funkcí $f : U \to \mathbf{R}$, jejichž parciální derivace až do řádu k včetně jsou na U definované a spojité.

Důsledek 11. *Pro každou funkci $f \in C^k(U)$ hodnoty jejích parciálních derivací až do řádu k včetně nezávisí na pořadí proměnných, podle nichž se derivuje, tj. pro všechna $l \le k$ a $a \in U$ platí*

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \partial x_{i_{l-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \partial x_{j_{l-1}} \dots \partial x_{j_1}}(a),$$

jakmile se posloupnosti $(i_1, \dots, i_l)$ a $(j_1, \dots, j_l)$ liší pouze permutací svých členů.

Důkaz. Když je posloupnost $v = (j_1, \dots, j_l)$ pouze permutací posloupnosti $u = (i_1, \dots, i_l)$, dokážeme u transformovat ve v prohazováním dvojic členů v u, dokonce vystačíme s prohazováním sousedních členů: v u nalezneme člen j_1 a necháme ho "propadnout" až dolů, pak necháme propadnout na správné místo j_2 atd. Rovnost hodnot parciálních derivací tak plyne z tvrzení 10. □

V případě spojitých parciálních derivací tedy záleží jen na multimnožině proměnných, podle kterých se derivuje, ale ne na jejich pořadí. Místo $\partial_x \partial_x$ píšeme stručně ∂x^2 apod. Pro $f \in C^5(U)$ tedy například máme

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial^5 f}{\partial y^2\, \partial x\, \partial z\, \partial y} = \frac{\partial^5 f}{\partial x\, \partial z\, \partial y^3} = \cdots$$

Velmi užitečným nástrojem při studiu vlastností funkcí je Taylorův rozvoj, jehož verzi pro více proměnných nyní odvodíme. Jak rozumět použitému symbolickému zápisu diferenciálního operátoru vysvětlíme na příkladu, v němž $f = f(x, y, z)$ je funkce a $a \in \mathbf{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ jsou konstanty. Například zápisem

$$(\alpha \partial_y + \beta \partial_z)^3 f(a)$$

se rozumí

$$\begin{aligned} & (\alpha^3(\partial_y)^3 + 3\alpha^2\beta(\partial_y)^2\partial_z + 3\alpha\beta^2\partial_y(\partial_z)^2 + \beta^3(\partial_z)^3)f(a) \\ = \; & \alpha^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) + 3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(a) + 3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}(a) + \beta^3\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(a). \end{aligned}$$

Tvrzení 12. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, $a \in U$ je bod a $f : U \to \mathbf{R}$ je funkce, která je na U n krát spojitě diferencovatelná, tj. $f \in C^n(U)$. Potom v okolí bodu a máme Taylorův rozvoj*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2 + \cdots + h_m\partial_m)^i f(a) + o(\|h\|^n) \\ &= \sum \frac{1}{i_1!\ldots i_m!} \cdot \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_m^{i_m}}(a) \cdot h_1^{i_1}\ldots h_m^{i_m} + o(\|h\|^n), \end{aligned}$$

kde v první sumě mocninu chápeme symbolicky (ve smyslu operátorového počtu) a ve druhé sumě sčítáme přes všechny m-tice nezáporných celých čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$, jejichž součet je nanejvýš n.

Důkaz. Na přednášce zazněla jen hlavní myšlenka: vezmeme Taylorův rozvoj až do řádu n pomocné funkce jedné proměnné $F(t) = f(a+th)$, kde $t \in [0,1]$. Opakovaným použitím řetízkového pravidla ($F = f \circ l$, kde l je lineární zobrazení, fakticky přímka $l(t) = a + th$) pro $k \le n$ dostáváme

$$F^{(k)}(t) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(a+th)\cdot h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k},$$

kde $i_1, \ldots, i_k$ probíhají nezávisle na sobě všechny indexy $1, 2, \ldots, m$. Dosazením do Taylorova rozvoje funkce F (se zbytkem v Lagrangeově tvaru)

$$f(a+h) = F(1) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}F^{(i)}(0) + F^{(n)}(\theta),\ 0 < \theta < 1,$$

dostáváme, s využitím kompaktního symbolického zápisu parciálních derivací, první formuli pro $f(a+h)$. Druhá formule vyplývá z první pomocí multinomické věty:

$$(h_1\partial_1 + h_2\partial_2 + \cdots + h_m\partial_m)^i = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\binom{i}{i_1, i_2, \ldots, i_m}\prod_{j=1}^{m}(h_j\partial_j)^{i_j},$$

kde $i_1, i_2, \ldots, i_m$ probíhají nezáporná celá čísla se součtem i a

$$\binom{i}{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \frac{i!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_m!}$$

je multinomický koeficient. $\square$

Sčítance odpovídající $i = 0, 1$ jsou, respektive, $f(a)$ a $\mathrm{D}f(a)(h)$. Taylorova formule zobecňuje lokální aproximaci pomocí diferenciálu, kterou dostáváme pro $n = 1$.

Symetrická (tj. $a_{i,j} = a_{j,i}$) reálná $n \times n$ matice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ definuje kvadratickou formu

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = xAx^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

(x je řádkový vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Připomeňme si, že A se nazývá

- *pozitivně (negativně) definitní*, když $P(x) > 0$ ($P(x) < 0$) pro všechny $x \in \mathbf{R}^n \backslash \{\overline{0}\}$;
- *pozitivně (negativně) semidefinitní*, když $P(x) \geq 0$ ($P(x) \leq 0$) pro všechny $x \in \mathbf{R}^n$;
- *indefinitní*, není-li ani pozitivně ani negativně semidefinitní, tj. $P(x) > 0$ a $P(y) < 0$ pro nějaké dva vektory $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Hessova matice funkce f v bodě a, kde $f : U \to \mathbf{R}$ je definovaná na okolí $U \subset \mathbf{R}^m$ bodu a a má na U všechny derivace druhého řádu, je matice zaznamenávající hodnoty těchto derivací:

$$H_f(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{m} .$$

Podle tvrzení 10 mají funkce z $C^2(U)$ v každém bodě z U symetrickou Hessovu matici.

Odvodíme kritérium existence lokálních extrémů funkcí m proměnných, které zobecňuje výsledek pro funkce jedné proměnné. Roli hodnoty druhé derivace převezme Hessova matice. Připomeňme si, že funkce $f : U \to \mathbf{R}$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, má v bodě $a \in U$ ostré lokální minimum, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že $0 < \|x - a\| < \delta$ implikuje $f(x) > f(a)$.

(Neostré) lokální minimum znamená, že $\|x-a\| < \delta$ implikuje $f(x) \geq f(a)$. Podobně pro ostré a neostré lokální maximum. Funkce f nemá v a ani neostrý lokální extrém, nemá-li v tomto bodě ani lokální neostré minimum ani lokální neostré maximum, to jest pro každé $\delta > 0$ existují body x, y takové, že $\|x-a\|, \|y-a\| < \delta$ a $f(x) > f(a)$, $f(y) < f(a)$.

Věta 13. *Nechť $f \in C^2(U)$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, a $a \in U$ je bod.*

- *Pokud $\nabla f(a) \neq \overline{0}$, nemá f v a ani neostrý lokální extrém.*
- *Pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$ a Hessova matice $H_f(a)$ funkce f v bodě a je pozitivně (negativně) definitní, potom má f v a ostré lokální minimum (maximum).*
- *Pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$ a Hessova matice $H_f(a)$ je indefinitní, nemá f v a ani neostrý lokální extrém.*

Důkaz. Bude příště. $\square$

9. přednáška 29. listopadu 2005

Věta 13. *Nechť $f \in C^2(U)$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, a $a \in U$ je bod.*

1. *Pokud $\nabla f(a) \neq \overline{0}$, nemá f v a ani neostrý lokální extrém. (Zde samozřejmě stačí místo $f \in C^2(U)$ předpokládat pouze existenci gradientu $\nabla f(a)$.)*

2. *Pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$ a Hessova matice $H_f(a)$ funkce f v bodě a je pozitivně (negativně) definitní, potom má f v a ostré lokální minimum (maximum).*

3. *Pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$ a Hessova matice $H_f(a)$ je indefinitní, nemá f v a ani neostrý lokální extrém.*

Důkaz. 1. Pokud $\nabla f(a) \neq \overline{0}$, pak např. $\partial_{x_1} f(a) > 0$ (pro $\partial_{x_1} f(a) < 0$ postupujeme obdobně), a $f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) = f(a) + \partial_{x_1} f(a)h + o(h)$. Existuje tedy $\delta > 0$ takové, že pro $h \in (-\delta, 0)$ máme $f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) - f(a) < \frac{1}{2}\partial_{x_1} f(a)h < 0$ a pro $h \in (0, \delta)$ máme $f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) - f(a) > \frac{1}{2}\partial_{x_1} f(a)h > 0$. Funkce f nemá v a ani neostrý lokální extém.

2 a 3. V dalším předpokládáme, že $\nabla f(a) = \overline{0}$. Kvadratickou formu $xH_f(a)x^T$ označíme jako $P(x)$ a f rozvineme v okolí a do Taylorova rozvoje řádu $n = 2$ (tvrzení 12). Protože $\nabla f(a) = \overline{0}$, sčítanec s $i = 1$ zmizí; $f(a)$ odpovídající $i = 0$ převedeme vlevo. Protože $P(x)$ je homogenní polynom stupně 2, dostáváme vyjádření přírůstku

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i!}(h_1\partial_1 + h_2\partial_2 + \cdots + h_m\partial_m)^i f(a) + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)h_i h_j + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2}P(h_1, h_2, \ldots, h_m) + o(\|h\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\|h\|^2\Big(P(h_1/\|h\|, h_2/\|h\|, \ldots, h_m/\|h\|) + o(1)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\|h\|^2(P(e) + o(1)),
\end{aligned}$$

kde vektor $e = e(h) = (h_1/\|h\|, h_2/\|h\|, \ldots, h_m/\|h\|)$ leží na jednotkové sféře $S = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \|x\| = 1\}$. S je kompaktní podmnožina $\mathbf{R}^m$ (věta 9 v 1. kapitole) a spojitá funkce $P(x)$ na ní nabývá svého minima a maxima (věta 10 v 1. kapitole):

$$\mu = P(\alpha) = \min_{\|x\|=1} P(x) \ \text{ a } \ M = P(\beta) = \max_{\|x\|=1} P(x).$$

Pozitivní (negativní) definitnost $H_f(a)$ je zřejmě ekvivalentní nerovnostem $0 < \mu \le M$ ($\mu \le M < 0$) a indefinitnost je ekvivalentní $\mu < 0 < M$.

Je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, máme $P(e) \ge \mu > 0$ pro každé $e \in S$, a tak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé h splňující $0 < \|h\| < \delta$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\|h\|^2(P(e) + o(1)) > \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \frac{\mu}{2} > 0$$

—f má v a ostré lokální minimum. Analogicky pro negativně definitní $H_f(a)$ dostáváme ostré lokální maximum. Když je $H_f(a)$ indefinitní, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (0, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} f(a+t\alpha) - f(a) &= \frac{t^2}{2}(P(\alpha) + o(1)) < \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\mu}{2} < 0 \\ f(a+t\beta) - f(a) &= \frac{t^2}{2}(P(\beta) + o(1)) > \frac{t^2}{2} \cdot \frac{M}{2} > 0 \end{aligned}$$

—f nemá v a ani neostrý lokální extrém. □

Hledání extrémů funkcí více proměnných. Chceme nalézt lokální i globální extrémy funkce m proměnných $f: D \to \mathbf{R}$ na množině $D \subset \mathbf{R}^m$. Začneme lokálními extrémy a budeme nejprve předpokládat, že množina D je otevřená a $f \in C^2(D)$. Z části 1 věty 13 víme, že všechny lokální (a tedy i globální) extrémy jsou obsaženy v množině *stacionárních bodů*

$$S = \{a \in D \mid \nabla f(a) = \overline{0}\}.$$

Nejprve nalezneme S. U stacionárních bodů $a \in S$ s definitní nebo indefinitní maticí $H_f(a)$ známe díky částem 2 a 3 věty 13 povahu lokálního extrému v a. Je-li $H_f(a)$ semidefinitní, neříká věta 13 o chování f v okolí a nic.

O definitnosti, semidefinitnosti či indefinitnosti matice $H_f(a) = (b_{i,j})_{i,j=1}^m$ rozhodneme metodami lineární algebry. Připomeňme Sylvestrovo kritérium: pokud jsou všechny subdeterminanty $d_n = \det(b_{i,j})_{i,j=1}^n$, $1 \le n \le m$, nenulové, pak, jsou-li všechny kladné, je matice $H_f(a)$ pozitivně definitní, nastává-li $(-1)^{n+1}d_n > 0$, $1 \le n \le m$, je $H_f(a)$ negativně definitní a jinak je indefinitní; o případu, kdy $d_n = 0$ pro alespoň jedno n, Sylvestrovo kritérium netvrdí nic. Obecně vždy můžeme matici $H_f(a)$ změnou báze diagonalizovat: nalezneme regulární matici C takovou, že $B = C \cdot H_f(a) \cdot C^T$ má mimo hlavní diagonálu jen nuly. Má-li B na diagonále kladné i záporné prvky, je $H_f(a)$ indefinitní. Jsou-li všechny diagonální prvky B kladné (záporné), je $H_f(a)$ pozitivně (negativně) definitní. Ve zbývajících případech je $H_f(a)$ odpovídajícím způsobem semidefinitní. Pro malé m, např. $m = 2$, je možné přímo vzít kvadratickou formu a doplnit ji na čtverce, viz následující příklad.

Obecný problém lokálních extrémů je ovšem složitější: funkce $f: \Omega \to \mathbf{R}$ je sice obvykle definovaná na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ a $f \in C^2(\Omega)$, ale lokální extrémy hledáme na množině $D \subset \Omega$, která nemusí být otevřená. D může být například uzavřená koule $\{x \in \mathbf{R}^m \mid \|x\| \le r\}$. V takovém případě D rozložíme jako $D = V \cup H$, kde V je vnitřek D a H je množina hraničních bodů ležících v D. Množina lokálních extrémů f na D je obsažena ve sjednocení množiny lokálních extrémů f na V a množiny lokálních extrémů f na H. Protože V je otevřená, na první množinu můžeme aplikovat postup podle věty 13 (ovšem v dimenzi $m > 1$ i pro složitou D může být $V = \emptyset$ a nijak si nepomůžeme). Hranice H se často dá definovat pomocí soustavy rovnic jako $H = \{x \in \mathbf{R}^m \mid F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_n(x) = 0\}$, kde F_i jsou "pěkné" funkce. Pro hledání lokálních extrémů na takových množinách H se používá *Lagrangeova metoda* (též *metoda Lagrangeových multiplikátorů*), kterou uvedeme na následující přednášce; jejím základem je věta strukturně analogická větě 13.

Po určení lokálních extrémů zbývá rozhodnout o globálních extrémech. Nejprve triviální ale užitečné pozorování: Protože globální extrém musí být i lokálním extrémem, nemá-li funkce například lokální minimum, nemá ani globální minimum. Pokud je množina D kompaktní, použijeme základní výsledek: spojitá funkce na kompaktní množině nabývá globální maximum i globální minimum. Když D kompaktní není, nemusí globální extrém existovat a musíme si pomoci jinak, třeba rozdělením D na "zvládnutelné" kusy. Pokud například lze D vyjádřit jako $D = D_1 \cup D_2$, kde (i) D_1 je kompaktní a (ii) existuje bod $b \in D_1$ takový, že pro každé $x \in D_2$ máme $f(x) \ge f(b)$, potom f nabývá na D svého minima a $\min_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D_1} f(x)$. Tolik v obecnosti a nyní konkrétní příklad.

Příklad (z bonifikačního testu 25.11.2005). Pro funkci

$$f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$$

nalezněte lokální a globální extrémy.

Máme

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f, \partial_y f) = (-y\sin x - \cos x, 2y + \cos x)$$

a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f & , & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{yx} f & , & \partial^2_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\cos x + \sin x & , & -\sin x \\ -\sin x & , & 2 \end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se snadno vyřeší a dává stacionární body

$$s_k = (\pi/2 + k\pi, 0),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Tedy

$$H_f(s_k) = \begin{pmatrix} (-1)^k & , & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & , & 2 \end{pmatrix}$$

a

$$H_f(s_k) = \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix} \text{ pro liché } k \text{ a } H_f(s_k) = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} \text{ pro sudé } k.$$

První matice je indefinitní (odpovídá jí kvadratická forma $P(x,y) = -x^2 + 2xy + 2y^2 = -(x-y)^2 + 3y^2$) a druhá je pozitivně definitní ($P(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2$). Pro liché k v s_k není lokální extrém a pro sudé k je v s_k ostré lokální minimum, vždy s hodnotou $f(s_{2k}) = -3$.

Jediné lokální extrémy funkce f tedy jsou tato ostrá lokální minima. Globální maximum neexistuje, protože f je shora neomezená ($f(\pi/2, y) = y^2 - 3$); jiný důvod je ten, že f nemá žádné lokální maximum. Definiční obor $\mathbf{R}^2$ není kompaktní. Funkce f je však 2π-periodická v x a pro vyšetření globálních minim stačí uvážit její hodnoty v pásu P daném nerovnostmi $0 \le x \le 2\pi$. Na jeho hranici máme hodnoty $f(0,y) = f(2\pi, y) = y^2 + y - 2 = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \ge -\frac{9}{4} > -3$.[6] Dále pro $|y| \ge 2$ a libovolné $x \in \mathbf{R}$ máme

[6] V této chvíli ještě nejsme hotovi. I když hodnoty f na hranici pásu nejsou menší než -3, pás sám je nekompaktní a pro $y \to \pm\infty$ by někde uprostřed něj mohla f klesat k asymptotě pod -3; globální minimum by pak neexistovalo. Následující jednoduchý odhad ukazuje, že takto se f nechová.

$f(x,y) \geq y^2 - |y| - 3 = (y \pm \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4} \geq -1 > -3$. Takže, píšeme-li $P = P_1 \cup P_2$, kde P_1 je (kompaktní) obdélník $[0, 2\pi] \times [-2, 2]$ a P_2 je (nekompaktní) zbytek pásu P, pro každé $a \in P_2$ máme $f(a) \geq -1 > f(s_0) = -3$, kde $s_0 \in P_1$. Na hranici obdélníka P_1 má f vždy hodnotu alespoň $-9/4 > -3$ a na jeho vnitřku má f jediné lokální minimum $f(s_0) = -3$. Proto má f na obdélníku P_1 a na celém pásu P jediné (ostré) globální minimum $f(s_0) = -3$. Z 2π-periodičnosti v proměnné x plyne, že hodnoty $f(s_{2k}) = -3$, $k \in \mathbf{Z}$, jsou všechna neostrá globální minima funkce f na $\mathbf{R}^2$.

2.4. Věta o implicitních funkcích. Uvažujme soustavu n rovnic o $m+n$ neznámých

$$\begin{array}{rcl} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) & = & 0, \end{array}$$

kde F_i jsou reálné funkce definované na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^{m+n}$, $x_0 \in \mathbf{R}^m$ a $y_0 \in \mathbf{R}^n$, který je řešením soustavy, tj. $F_i(x_0, y_0) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$. Nedaly by se neznámé $y_1, \ldots, y_n$ pomocí soustavy eliminovat a nedaly by se vyjádřit, alespoň lokálně v okolí x_0, jako funkce $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)$ prvních m neznámých? Následující věta ukazuje, že za určitých předpokladů o funkcích F_i—jsou z třídy C^1 a lineární aproximace jejich y-ových částí v bodě (x_0, y_0) jsou lineárně nezávislé—to možné je. Takto *implicitně* definované funkce f_i jsou také z třídy C^1 a jejich parciální derivace se snadno vypočítají z parciálních derivací funkcí F_i.

Nejprve zavedeme značení. Pro zobrazení $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ a $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, kde $F_i = F_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ a $f_j = f_j(x_1, \ldots, x_m)$, označíme $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a

$$F_x'(x,y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n,m}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$F_y'(x,y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n,m}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x).$$

První a třetí matice mají rozměr $n \times m$, druhá matice je čtvercová s rozměrem $n \times n$.

Věta 14 (o implicitních funkcích). *Nechť*

$$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : \; W \to \mathbf{R}^n$$

je zobrazení definované na okolí $W \subset \mathbf{R}^{m+n}$ *bodu* (x_0, y_0)*, kde* $x_0 \in \mathbf{R}^m$ *a* $y_0 \in \mathbf{R}^n$*, a splňující následující podmínky.*

1. $F_i = F_i(x, y) \in C^1(W)$ *pro* $1 \le i \le n$.
2. $F_i(x_0, y_0) = 0$ *pro* $1 \le i \le n$.
3. $\det(F'_y(x_0, y_0)) \neq 0$.

Potom existují okolí $U \subset \mathbf{R}^m$ *a* $V \subset \mathbf{R}^n$ *bodů* x_0 *a* y_0 *taková, že* $U \times V \subset W$ *a pro každý bod* $x \in U$ *existuje právě jeden bod* $y \in V$ *splňující* $F_i(x, y) = 0$ *pro* $1 \le i \le n$. *Jinak řečeno, existuje zobrazení* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \; U \to V$ *takové, že*

$$\forall (x, y) \in U \times V : \;\; F(x, y) = \overline{0} \iff y = f(x).$$

Navíc každá funkce f_i *je v* $C^1(U)$*, takže zobrazení* f *je diferencovatelné na* U *a jeho Jacobiho matice* $f'(x)$ *v bodě* $x \in U$ *splňuje*

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x)).$$

Důkaz věty 14 v této přednášce pomineme. (Lze ho začít nejprve případem jedné rovnice $n = 1$ a pak postupovat indukcí podle n nebo je možné hned dokázat obecnou verzi pomocí Banachovy–Picardovy věty o kontrahujícím zobrazení, viz V. A. Zorich, *Mathematical Analysis*, Springer 2004, podkapitola 8.5 ve sv. 1 a podkapitola 10.7 ve sv. 2.) Ukážeme alespoň, jak ze vztahů

$$F_k(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0, \;\; 1 \le k \le n \;\; \text{a} \;\; x \in U,$$

a z $f_i \in C^1(U)$ plyne hořejší formule pro $f'(x)$ a také praktičtější explicitní formule pro $\partial_i f_j(x)$. Parciálním derivováním těchto n rovnic podle x_i, kde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ je pevné, dostáváme n vztahů

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x, f(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0,\ 1 \le k \le n.$$

Máme soustavu n rovnic s n neznámými $\partial_i f_j(x)$, $1 \le j \le n$, kterou zapíšeme maticově v kanonické podobě jako

$$F'_y \cdot \partial_i f = -\partial_i F,$$

kde $F'_y = F'_y(x, f(x))$, $\partial_i F$ je sloupcový vektor $(\partial_{x_i} F_1, \partial_{x_i} F_2, \ldots, \partial_{x_i} F_n)^T$, $\partial_i f$ je analogický sloupcový vektor pro f a argumenty parciálních derivací $x, f(x)$ a x pro stručnost vynecháváme. Vynásobíme-li tento vztah zleva inverzní maticí $(F'_y)^{-1}$ a výsledných m rovností odpovídajících $1 \le i \le m$ sloučíme do jedné, dostaneme

$$(\partial_1 f, \ldots, \partial_m f) = -(F_y)^{-1} \cdot (\partial_1 F, \ldots, \partial_m F),$$

což je přesně rovnice $f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))$. Podle Cramerova pravidla (známého z Lineární algebry) se ale $\partial_i f_j = \partial_i f_j(x)$ také rovná $\det A' / \det A$, kde $A = F'_y = F'_y(x, f(x))$ a A' je modifikovaná matice soustavy, která z A vznikne nahrazením j-tého sloupce matice A sloupcem pravé (rodné) strany $-\partial_i F$. Takže

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = -\frac{\det A'}{\det F'_y} = -\frac{\det(\partial_{y_1} F, \ldots, \partial_{y_{j-1}} F, \partial_{x_i} F, \partial_{y_{j+1}} F, \ldots, \partial_{y_n} F)}{\det(\partial_{y_1} F, \partial_{y_2} F, \ldots, \partial_{y_n} F)}$$

(v bodech $x \in U$ a $(x, f(x)) \in U \times V$).

10. přednáška 6. prosince 2005

Příklad (z bonifikačního testu 25.11.2005). Rozhodněte, zda soustava rovnic

$$x + y - \sin z = 0 \quad \text{a} \quad -x - y^3 + \mathrm{e}^z - 1 = 0$$

definuje v okolí 0 funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ splňující $y(0) = z(0) = 0$, které jsou třídy C^1. Pokud ano, spočítejte hodnoty derivací $y'(0)$ a $z'(0)$.

Pro $F_1(x,y,z) = x+y-\sin z$, $F_2(x,y,z) = -x-y^3+\mathrm{e}^z-1$ a $F = (F_1, F_2)$ máme skutečně $F(0,0,0) = (0,0)$ a

$$\begin{aligned}
\det(\partial_y F(0,0,0), \partial_z F(0,0,0)) &= \det\begin{pmatrix} 1 & , & -\cos z \\ -3y^2 & , & \mathrm{e}^z \end{pmatrix}(0,0,0) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & , & -1 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Předpoklady věty o implicitních funkcích jsou tedy splněny a uvedené funkce $y(x)$ a $z(x)$ jsou na okolí nuly definovány. Protože $\partial_x F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, podle vztahů uvedených na konci předešlé přednášky máme

$$y'(0) = -\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & , & -1 \\ -1 & , & 1 \end{pmatrix}}{1} = 0 \quad \text{a} \quad z'(0) = -\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ 0 & , & -1 \end{pmatrix}}{1} = 1.$$

Důsledek 15. *Nechť $f : U \to \mathbf{R}^m$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je okolí bodu x_0, je zobrazení z $C^1(U)$, které má v x_0 nenulový jacobián. Potom existují okolí $U_1 \subset U$ a $V \subset \mathbf{R}^m$ bodů x_0 a $y_0 = f(x_0)$ taková, že $f : U_1 \to V$ je bijekce, inverzní zobrazení $f^{-1} : V \to U_1$ je z $C^1(V)$ a pro každé $x \in U_1$ v bodě $y = f(x) \in V$ máme*

$$\mathrm{D}f^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}.$$

Jacobiho matice zobrazení f^{-1} v bodě y je tedy inverzní k Jacobiho matici zobrazení f v bodě x.

Důkaz. Uvažme zobrazení o $2m$ proměnných

$$F(x,y) = f(x) - y : \ U \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m,$$

tj. $F = (F_1, \dots, F_m)$ a $F_i(x, y) = f_i(x) - y_i$. Patrně $F_i(x_0, y_0) = 0$, F_i jsou třídy C^1 a Jacobiho matice zobrazení F vzhledem k x-ovým proměnným $x_1, x_2, \dots, x_m$ v bodě x_0 je právě Jacobiho matice f v x_0. Podle věty 14 tedy existují taková okolí $U_2 \subset U$ a $V \subset \mathbf{R}^m$ bodů x_0 a y_0 a takové zobrazení $g = (g_1, \dots, g_m) : V \to U_2$, že $g_i \in C^1(V)$ a

$$\forall\ (x, y) \in U_2 \times V :\ F(x, y) = f(x) - y = \overline{0} \iff x = g(y)$$

(speciálně $g(y_0) = x_0$). Takže pro všechny $y \in V$ máme $f(g(y)) = y$ a zobrazení f a g jsou navzájem inverzní. Označme $U_1 = g(V)$. Pak $f : U_1 \to V$ je bijekce s inverzem g. Množina U_1 je otevřená, protože je vzorem otevřené množiny V ve spojitém zobrazení f, a je to okolí x_0. Vzorec pro diferenciál inverzního zobrazení plyne ze vztahu ve větě 14 nebo diferencováním složeného zobrazení $f^{-1} \circ f = id$ (věta 8). □

Bijektivní zobrazení mezi dvěma otevřenými podmnožinami $\mathbf{R}^m$, které je třídy C^1 a jeho inverz rovněž, se nazývá *difeomorfismus*. Důsledek 15 tedy praví, že zobrazení třídy C^1 definované na okolí bodu x_0, které má v x_0 nenulový jacobián, je na okolí x_0 lokální difeomorfismus.

Vázané extrémy. Nechť $f, F_1, \dots, F_n : U \to \mathbf{R}$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina, jsou funkce z $C^1(U)$ a $n < m$. Budeme hledat lokální extrémy funkce f na množině

$$H = \{x \in \mathbf{R}^m \mid F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_n(x) = 0\}.$$

Následující důsledek věty o implicitních funkcích udává nutnou podmínku, aby v bodě $a \in H$ funkce f měla lokální *vázaný* extrém, tj. lokální extrém vzhledem k množině H.

Důsledek 16 (Lagrangeovy multiplikátory). *Pokud v popsané situaci má Jacobiho matice zobrazení $F = (F_1, \dots, F_n)$ v bodě $a \in H$ největší možnou hodnost n (to jest, $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_n(a)$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbf{R}^m$) a v bodě a má funkce f (ostrý nebo neostrý) lokální extrém vzhledem k množině H, potom existují taková čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ (tzv.* Lagrangeovy multiplikátory*), že*

$$\nabla f(a) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(a) = \overline{0},$$

to jest, pro $1 \le j \le m$, $\partial_{x_j} f(a) - \lambda_1 \partial_{x_j} F_1(a) - \cdots - \lambda_n \partial_{x_j} F_n(a) = 0$.

Důkaz. Že uvedená Jacobiho matice má maximální hodnost n také ekvivalentně znamená, že pro nějakých n sloupců má odpovídající čtvercová $n \times n$ podmatice nenulový determinant. Můžeme předpokládat, že to nastává pro posledních n sloupců. Označíme-li tedy

$$x_1, x_2, \ldots, x_m = y_1, y_2, \ldots, y_{m-n}, z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

pak $\det(\partial_{z_1} F(a), \ldots, \partial_{z_n} F(a)) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích existují taková okolí U_1 a V_1 bodů $y_0 = (a_1, \ldots, a_{m-n})$ a $z_0 = (a_{m-n+1}, \ldots, a_m)$ a takové zobrazení $g = (g_1, \ldots, g_n) : U_1 \to V_1$, že pro (y, z) probíhající $U_1 \times V_1$ máme

$$F_i(y, z) = 0 \ \text{ pro } 1 \leq i \leq n \iff z = g(y)$$

(speciálně $g(y_0) = z_0$). Uvažme nyní funkci

$$h(y) = f(y, g_1(y), \ldots, g_n(y)),$$

která je definovaná na U_1. Protože má v y_0 lokální extrém (nyní už bez vazby), $\nabla h(y_0) = \overline{0}$. Pro $1 \leq i \leq m - n$ to znamená, že

$$\partial_{y_i} f(y_0, g(y_0)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{z_j} f(y_0, g(y_0)) \cdot \partial_{y_i} g_j(y_0) = 0.$$

V zápisu pomocí Jacobiho matic:

$$\begin{aligned} f'_y + f'_z g' &= \overline{0} \\ f'_y - f'_z (F'_z)^{-1} F'_y &= \overline{0} \\ f'_y - \lambda F'_y &= \overline{0} \end{aligned}$$

(v bodech $(y_0, g(y_0)) = (y_0, z_0) = a$ a y_0), kde za g' jsme nejprve dosadili podle vzorce ve větě 14 a pak jsme označili $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f'_z(y_0, g(y_0)) \cdot F'_z(y_0, g(y_0))^{-1}$. Ovšem z $\lambda = f'_z (F'_z)^{-1}$ plyne, že stejný vztah platí i v z-ových proměnných: $f'_z - \lambda F'_z = \overline{0}$. Celkem

$$f' - \lambda F' = \overline{0},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Ekvivalentní formulace podmínky Lagrangeových multiplikátorů je, že $\nabla f(a)$ leží v lineárním obalu vektorů $\mathcal{F} = \{\nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_n(a)\}$. Všimněme si, že podmínka je triviálně splněna pokud $\nabla f(a) = \overline{0}$. Uvedeme ještě další ekvivalentní formulaci. Uvažme vektorové podprostory $\mathbf{R}^m$ složené z vektorů kolmých na $\nabla f(a)$, resp. z vektorů kolmých na všechny vektory v $\mathcal{F}$ (předpokládáme, že $\nabla f(a) \neq \overline{0}$ a že vektory v $\mathcal{F}$ jsou lineárně nezávislé):

$$\begin{aligned} TN_a &= \{x \in \mathbf{R}^m \mid \langle \nabla f(a), x \rangle = 0\} \\ TH_a &= \{x \in \mathbf{R}^m \mid \langle \nabla F_1(a), x \rangle = \cdots = \langle \nabla F_n(a), x \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Podprostor TN_a má dimenzi $m-1$ a TH_a má dimenzi $m-n$. Podmínka Lagrangeových multiplikátorů ekvivalentně praví, že $TH_a \subset TN_a$. (Proč přesně platí ekvivalence $\nabla f(a) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \iff TH_a \subset TN_a$? Vzpomeňte si na ortogonální doplněk v Lineární algebře.) Pomocí implicitních funkcí se dá ukázat, že $a + TH_a$ je tečným afinním podprostorem k ploše $H = \{x \in \mathbf{R}^m \mid F_1(x) = \cdots = F_n(x) = 0\}$ v bodě a. Podobně $a + TN_a$ je tečnou afinní nadrovinou k "vrstevnicové" ploše

$$N = \{x \in \mathbf{R}^m \mid f(x) = f(a)\}$$

v bodě a. Podprostorům TN_a a TH_a říkáme *tečné prostory* (k odpovídajícím plochám v bodě a). Nutná podmínka lokálního vázaného extrému funkce f v bodě $a \in H$ se tedy dá zformulovat takto:

> Tečný prostor TH_a k ploše H v bodě a musí být obsažen v tečném prostoru TN_a k vrstevnicové ploše N funkce f v bodě a, $TH_a \subset TN_a$.

Příklad či spíše ilustrace. Podíváme se na situaci $m = 2$ a $n = 1$. Funkce $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ například udává nadmořskou výšku, tj. $f(x)$ je nadmořská výška bodu v terénu se zeměpisnými souřadnicemi x, a křivka $H = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid F(x) = 0\}$ je třeba silnice. Vrstevnice $N = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid f(x) = f(a) = b\}$, kde $a \in H$, je též rovinná křivka. Nechť $\nabla f(a), \nabla F(a) \neq \overline{0}$. Tečné prostory TH_a a TN_a pak mají dimenzi 1. Předpokládejme, že $TH_a \not\subset TN_a$. Křivky H a N potom lokálně v okolí svého průsečíku a vypadají jako dvě různé přímky p_H a p_N procházející bodem a. Zvětšíme-li trochu nadmořskou výšku na $b' = b + \delta$, $\delta > 0$, vrstevnice se trochu posune ve směru kolmém na N a stane se z ní vrstevnice N'; lokálně přímka $p_{N'}$ vznikne z p_N malým posunem ve směru kolmém na p_N a případným malým pootočením.[7] Každopádně se, pro každé dostatečně malé $\delta > 0$, přímky p_H a $p_{N'}$ a tedy i křivky H a N' opět protnou, jenom se průsečík obou křivek trochu posune po H z a do a'. Totéž nastane, když b trochu zmenšíme na $b' = b - \delta$, k posunům však dojde na opačnou stranu, speciálně nový průsečík a' křivek H a N' se dostane posunutím a po H na opačnou stranu. Funkce f tedy lokálně na H na jedné straně od bodu a nabývá hodnot menších než $b = f(a)$, zatímco na straně druhé nabývá hodnot větších. Takže f nemá v a vzhledem k H lokální extrém a pokud na silnici H zastaví v bodě a auto, v neutrálu se bez ruční brzdy určitě rozjede!

Ještě další ekvivalentní formulace podmínky Lagrangeových multiplikátorů užívá *Lagrangeovu funkci.* V situaci popsané v důsledku 16 tuto funkci $m+n$ proměnných definujeme jako

$$L(x,\lambda) = L(x_1,\ldots,x_m,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x).$$

Protože

$$\nabla L = (\partial_{x_1} f - \textstyle\sum_1^n \lambda_i \partial_{x_1} F_i,\ \ldots,\ \partial_{x_m} f - \sum_1^n \lambda_i \partial_{x_m} F_i,\ -F_1,\ \ldots,\ -F_n)$$

(v bodech (x,λ) a x), je $\nabla L(a,\lambda) = \overline{0}$ přesně ekvivalentní tomu, že bod a leží na ploše H (posledních n souřadnic gradientu) a že koeficienty $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ jsou Lagrangeovy multiplikátory (prvních m souřadnic gradientu). Nutnou podmínku lokálního extrému funkce f v bodě a vzhledem k H tedy můžeme zformulovat i takto:

Existuje bod $\lambda \in \mathbf{R}^n$ takový, že $\nabla L(a,\lambda) = \overline{0}$.

Zde se o náležení a do H nemusíme starat, protože je v podmínce $\nabla L(a,\lambda) = \overline{0}$ automaticky zahrnuto. Závěrem partie o vázaných extrémech uvedeme bez důkazu větu analogickou větě 13 a pak ji ilustrujeme příkladem.

[7] Je to ale opravdu tak, že malá změna nadmořské výšky jen málo změní vrstevnici? Vždycky to pravda není—představte si, že se nacházíte na rovném horském hřbetu a vrstevnice je hřbetová čára. Jakkoli malé zvětšení nadmořské výšky pak vede k naprosto radikální změně vrstevnice, protože ta úplně zmizí. Jako cvičení vysvětlete, proč se díky předpokladu $\nabla f(a) \neq \overline{0}$ vrstevnice funkce f v okolí a takto nechovají a malá změna b jen (popsaným způsobem) málo změní N.

Věta 17. *Nechť $f, F_1, \dots, F_n \in C^2(U)$, kde $U \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a $n < m$, $H = \{x \in \mathbf{R}^m \mid F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = 0\}$ a nechť $a \in H$ je bod. Předpokládejme dále, že Jacobiho matice zobrazení $F = (F_1, \dots, F_n)$ má v každém bodě $x \in U$ největší možnou hodnost n (to jest, $\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_n(x)$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbf{R}^m$).*

1. *Pokud pro každé $\lambda \in \mathbf{R}^n$ platí $\nabla L(a, \lambda) \neq \overline{0}$, potom f nemá v a vzhledem k H ani neostrý lokální extrém.*
2. *Pokud $\lambda \in \mathbf{R}^n$ splňuje $\nabla L(a, \lambda) = \overline{0}$ a kvadratická forma*
$$P(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \partial^2_{x_i x_j} L(a, \lambda) h_i h_j$$
je pozitivně (negativně) definitní na vektorech $h \in TH_a$, potom má funkce f v a vzhledem k množině H ostré lokální minimum (maximum).
3. *Pokud za stejných předpokladů jako ve 2 je $P(h_1, \dots, h_m)$ indefinitní na vektorech $h \in TH_a$, nemá f v a vzhledem k H ani neostrý lokální extrém.*

Podmínka 1 je samozřejmě už bůhví kolikátou reformulací důsledku 16. Nepřehlédněte, že definitnost či indefinitnost kvadratické formy P ve 2 a 3 se požaduje na tečném prostoru TH_a. To je ale jen malá obtíž—relace $h \in TH_a$ dává pro vektor h n lineárních rovnic. Můžeme tedy eliminovat n závislých proměnných h_i a dostaneme kvadratickou formu v $m - n$ nezávislých proměnných, jejíž definitnost či indefinitnost už vyšetřujeme na celém $\mathbf{R}^{m-n}$.

Příklad (nebyl na přednášce). Chceme nalézt lokální a globální extrémy funkce
$$f:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$
na rovině H dané rovnicí
$$F(x, y, z) = 2x - y - 3 = 0.$$

Gradient Lagrangeovy funkce $L(x, y, z, \lambda) = x^2 - y^2 + z^2 - \lambda(2x - y - 3)$ je
$$\nabla L = (2x - 2\lambda,\ -2y + \lambda,\ 2z,\ -2x + y + 3).$$

Soustava lineárních rovnic $\nabla L(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ má řešení $(x, y, z, \lambda) = (2, 1, 0, 2)$. Prozkoumáme tedy (jediný) bod $a = (2, 1, 0)$, který leží na H a splňuje podmínku Lagrangeových multiplikátorů. Matice druhých derivací funkce L podle proměnných x, y, z je

$$(\partial^2_{xx,xy,\ldots,zz} L(x, y, z, \lambda)) = \begin{pmatrix} 2 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & -2 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 2 \end{pmatrix}$$

(vůbec nezávisí na hodnotách proměnných) a odpovídá jí kvadratická forma $P(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 2z^2$. [8] Tečný prostor TH_a je dán rovnicí

$$\langle \nabla F(a), (x, y, z) \rangle = 2x - y = 0$$

(je to pochopitelně opět H, jen posunutá do počátku). Odtud vyjádříme $y = 2x$ a dosadíme do P: $P = -6x^2 + 2z^2$. Tato kvadratická forma je indefinitní na $\mathbf{R}^2$ a bod $a = (2, 1, 0)$ tak podle 3 předchozí věty není bodem lokálního extrému. Funkce f tedy na rovině H nemá žádný lokální a tedy ani žádný globální extrém.

Pro úplnost po tomto “profesorském” řešení uvedeme ještě řešení, řekněme, “studentské”. Z rovnice definující H vyjádříme $y = 2x - 3$ a dosadíme do funkce f: $f = x^2 - (2x-3)^2 + z^2 = -3x^2 + 12x - 9 + z^2 = -3(x-2)^2 + z^2 + 3$, kde x, z už probíhají bez vazby celé $\mathbf{R}^2$. To je indefinitní kvadratická forma a proto f vskutku nemá na H ani lokální ani globální extrém.

Jako cvičení si zkuste metodou Lagrangeovy funkce nalézt lokální a globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na elipse H dané rovnicí

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

[8]Forma P je sice indefinitní, ale musíme počítat dál, protože její zúžení na TH_a by mohlo být definitní nebo semidefinitní.

11. přednáška 13. prosince 2005

2.5. Základní věta algebry. Partii o extrémech funkcí více proměnných zakončíme jednou její pěknou aplikací. Dokážeme tzv. *Základní větu algebry* (ZVA), která praví:

> Každý nekonstantní polynom $p(z)$ s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

Nejprve připomeneme pár vlastností komplexních čísel, které budeme v důkazu potřebovat.

Každé nenulové komplexní číslo z má jednoznačné vyjádření v goniometrickém tvaru

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r\mathrm{e}^{i\phi},$$

kde $r = |z| > 0$ a $\phi \in [0, 2\pi)$; toto ϕ označíme jako $\arg(z)$. Řekneme, že nenulová čísla $u, v \in \mathbf{C}$ jsou *opačná*, když $|\arg(u) - \arg(v)| = \pi$. V důkazu ZVA použijeme tuto vlastnost opačných čísel:

$$u, v \in \mathbf{C} \text{ jsou opačná čísla a } 0 < |u| \le |v| \;\Rightarrow |u + v| = |v| - |u|.$$

Je jasné, že pro dané nenulové $u \in \mathbf{C}$ a dané $r > 0$ existuje právě jedno číslo $v \in \mathbf{C}$ s $|v| = r$, které je opačné k u.

Na množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ zde pohlížíme jako na $\mathbf{R}^2$ s euklidovskou normou $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Funkce $f:\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ chápeme jako funkce $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ a podobně funkce $f:\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ chápeme jako zobrazení $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

Lemma. *Nechť $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ a $r > 0$. Potom funkce*

$$f(z) = az^n:\ \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < (r/|a|)^{1/n}\} \to \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < r\}$$

je surjekce.

Důkaz. Nechť $z \in \mathbf{C}$ a $0 < |z| < r$. Položíme

$$z_0 = \frac{|z|^{1/n}\mathrm{e}^{i\arg(z)/n}}{|a|^{1/n}\mathrm{e}^{i\arg(a)/n}}.$$

Pak $f(z_0) = z$ a $0 < |z_0| < (r/|a|)^{1/n}$. □

Důkaz Základní věty algebry. Nechť tedy polynom

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

splňuje $a_i \in \mathbf{C}$, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Chceme dokázat existenci komplexního čísla $z_0 \in \mathbf{C}$ splňujícího $p(z_0) = 0$. Použijeme funkci

$$f(z) = |p(z)| :\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}_{\geq 0}.$$

Jako funkce $f :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je $f(z)$ spojitá, protože $|p(a+bi)| = \sqrt{r(a,b)^2 + s(a,b)^2}$, kde r a s jsou nějaké polynomy dvou proměnných s reálnými koeficienty. Dokážeme dvě vlastnosti funkce $f(z)$.

Vlastnost 1. Nabývá na $\mathbf{C}$ svého minima: $\min_{z \in \mathbf{C}} f(z) = f(z_0)$ pro nějaké $z_0 \in \mathbf{C}$.

Vlastnost 2. Když $f(u) > 0$ pro nějaké $u \in \mathbf{C}$, potom existuje $u' \in \mathbf{C}$ takové, že $f(u') < f(u)$.

Z vlastnosti 2 vyplývá, že bod globálního minima z_0 zaručený vlastností 1 musí splňovat $f(z_0) = |p(z_0)| = 0$. Tedy $p(z_0) = 0$ a ZVA je dokázána. Zbývá ovšem dokázat obě vlastnosti.

Vlastnost 1. Položíme

$$R = \max\Big(1,\ 2(|a_0| + 1)/|a_n|,\ 2n \cdot |a_n|^{-1} \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|\Big).$$

Pak pro každé $z \in \mathbf{C}$ se $|z| > R$ máme

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&= |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \\
&\geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{z^{n-i}} \right| \right) \\
&\geq |z| \left(|a_n| - \frac{n \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{|z|} \right) \\
&\geq 2 \frac{|a_0| + 1}{|a_n|} \cdot \frac{|a_n|}{2} \\
&= |a_0| + 1 \\
&> |a_0|.
\end{aligned}$$

Nerovnost $|z| > R$ tedy implikuje $|p(z)| > |p(0)| = |a_0|$. Pak ale

$$\inf_{z \in \mathbf{C}} |p(z)| = \inf_{|z| \leq R} |p(z)| = \min_{|z| \leq R} |p(z)| = |p(z_0)|$$

pro nějaké číslo z_0 z kruhu $K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq R\}$, protože K je kompaktní a $f(z) = |p(z)|$ je spojitá. Takže $\min_{z \in \mathbf{C}} |p(z)| = \min_{|z| \leq R} |p(z)| = |p(z_0)|$.

Vlastnost 2. Nechť $u \in \mathbf{C}$ a $f(u) > 0$, to jest $p(u) \neq 0$. Polynom $p(z)$ rozvineme do Taylorovy řady se středem v u neboli, řečeno v jazyce lineární algebry, místo v kanonické bázi $\{1, z, z^2, \ldots\}$ ho vyjádříme jako lineární kombinaci v bázi $\{1, z-u, (z-u)^2, \ldots\}$:

$$p(z) = b_0 + b_1(z-u) + \cdots + b_n(z-u)^n, \; b_i \in \mathbf{C}.$$

Zde $b_0 = p(u) \neq 0$ a $b_n = a_n \neq 0$. Nejmenší index $k \geq 1$, pro nějž $b_k \neq 0$, dělí součet na tři sčítance:

$$\begin{aligned} p(z) &= b_0 + b_k(z-u)^k + \sum_{i=k+1}^{n} b_i(z-u)^i \\ &= b_0 + p_1(z) + p_2(z), \end{aligned}$$

kde $p_1(z) = b_k(z-u)^k$, $b_k \neq 0$, a $p_2(z) = \sum_{i=k+1}^{n} b_i(z-u)^i$. Index k a sčítanec $p_1(z)$ jsou vždy definovány, ale může se stát, že $k = n$. Potom klademe $p_2(z) \equiv 0$.

Je zřejmé, že pro $z \to u$ máme $p_2(z) = o(p_1(z))$. Zvolíme tedy $\delta > 0$ tak, že $|z-u| < \delta$ implikuje $|p_2(z)| \leq \frac{1}{2}|p_1(z)|$. Dále zvolíme $r > 0$ tak malé, že $r < |b_0|$ a $(r/|b_k|)^{1/k} < \delta$. Zvolíme $c \in \mathbf{C}$ tak, že $0 < |c| < r < |b_0|$ a c je číslo opačné k b_0. Pak podle lemmatu existuje $u' \in \mathbf{C}$ takové, že $0 < |u'-u| < (r/|b_k|)^{1/k} < \delta$ a $p_1(u') = c$. Pak ale

$$\begin{aligned} |p(u')| &= |b_0 + p_1(u') + p_2(u')| \\ &\leq |b_0 + c| + |p_2(u')| \\ &= |b_0| - |c| + |p_2(u')| \\ &\leq |b_0| - \tfrac{1}{2}|c| \\ &< |b_0| \\ &= |p(u)| \end{aligned}$$

a $f(u') = |p(u')| < |p(u)| = f(u)$, což jsme chtěli dokázat. □

Vlastně jsme dokázali, že jediná lokální minima funkce $f(z) = |p(z)|$ jsou kořeny polynomu p. Mírnou modifikací důkazu vlastnosti 2 lze dokázat, že $f(z) = |p(z)|$ nemá žádná lokální maxima.

Kapitola 3 — Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic

3.1. Úvod do úvodu. Diferenciální rovnice (DR), to jest relace mezi hodnotami derivací hledaných funkcí, hrají stěžejní úlohu v matematických modelech problémů z fyziky, techniky, biologie, ekonomie atd.

Příklady. Newtonův zákon síly, s nímž jsme se už na přednášce setkali, se dá vyjádřit diferenciální rovnicí

$$mx'' = F,$$

kde $x = x(t) \in \mathbf{R}$ je poloha částice o hmotnosti m v čase t (uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ), pokud je vystavena působení síly F. Ta může být obecně nějakou funkcí času, polohy částice a její rychlosti: $F = F(t, x, x')$. Uvažme nejjednodušší situaci, kdy je F konstantní—představuje třeba působení tíhového pole Země, které se nemění s časem a nezávisí na poloze částice a už vůbec ne na její rychlosti (zjevné idealizace). Dostaneme tak *rovnici volného pádu*

$$mx'' = -mg$$

(g je konstanta tíhového zrychlení), jejímž řešením je zřejmě každá funkce

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Tyto dvě konstanty vyjadřují skutečnost, že pohyb částice je určen úplně teprve zadáním její polohy a rychlosti v nějakém čase.

Jako druhý příklad DR si uvedeme *rovnici radioaktivního rozpadu*

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -kR.$$

Popisuje vývoj množství $R = R(t)$ rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase t; k je materiálová konstanta. Je jasné, že každá funkce $R = c\exp(-kt)$, kde c je konstanta, je řešením této rovnice.

DR dělíme na *obyčejné diferenciální rovnice* (ODR, anglicky ODE), v nichž vystupují funkce pouze jedné proměnné, a na *parciální diferenciální rovnice* (PDR, anglicky PDE), které obsahují funkce více proměnných a jejich parciální derivace. Obě předchozí rovnice jsou ODR. V této přednášce se podíváme jen na teorii ODR a to ještě jen trochu. Než tedy PDR úplně opustíme, uvedeme si pro informaci jejich tři důležité reprezentanty: Laplaceovu rovnici nebo také rovnici potenciálu

$$u = u(x, y): \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

rovnici difuze nebo také rovnici vedení tepla

$$u = u(x, t): \; \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

a vlnovou rovnici

$$u = u(x, t): \; a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

α a a jsou konstanty. O fyzikálním významu těchto rovnic už něco napovídají jejich názvy.

Obecný tvar ODR pro neznámou funkci $y = y(x)$ je

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

kde F je nějaká funkce $n + 2$ proměnných. Nejvyššímu řádu n derivace vyskytujícímu se v rovnici se říká *řád rovnice.* Hořejší rovnice pro volný pád je tedy (obyčejná diferenciální) rovnice druhého řádu, kdežto rovnice radioaktivního rozpadu je prvního řádu.

Diferenciální rovnice tvaru

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou zadané funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce, je *lineární diferenciální rovnice (řádu n) s pravou stranou* $b(x)$. Pokud je $b(x)$ identicky nulová, mluvíme o *homogenní lineární rovnici.* Diferenciální rovnice, které nejsou tohoto tvaru (a závisejí tedy na některých proměnných pro neznámou funkci a její derivace nelineárně), jsou *nelineární diferenciální rovnice.* Například *rovnice kyvadla*

$$\theta'' + (g/l) \sin \theta = 0,$$

která popisuje pohyb kyvadla délky l kývajícího se v homogenním tíhovém poli—úhel $\theta = \theta(t)$ je odchylka kyvadla od svislice v čase t—je nelineární. Pro malé výchylky θ platí $\sin\theta \approx \theta$ a můžeme řešit lineární aproximaci rovnice kyvadla $\theta'' + (g/l)\theta = 0$, což už je lineární ODR. Rovnice volného pádu i rovnice radioaktivního rozpadu jsou lineární.

Diferenciální rovnice $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, v nichž je funkce F polynom $n+2$ proměnných, jsou *algebraické diferenciální rovnice*. Lineární diferenciální rovnice jsou speciálním případem algebraických. Rovnice kyvadla není algebraická.

Příklady. Nechť
$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$
je mocninná řada, v níž koeficienty B_n jsou tzv. *Bellova čísla*; B_n je počet rozkladů n-prvkové množiny na neprázdné disjunktní bloky, například $B_0 = B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$ atd. Dá se dokázat, že tato řada má poloměr konvergence ∞ a definuje tedy libovolněkrát diferencovatelnou funkci $B(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dále se dá dokázat, že $B(x)$ splňuje algebraickou diferenciální rovnici
$$B'' - (B')^2 - B'B = 0.$$
Jako cvičení ji odvoďte z faktu, že $B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.

Pro permutaci $\pi = a_1 a_2 \ldots a_n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ označíme $r(\pi)$ délku nejdelší rostoucí podposloupnosti v π, například $r(5642713) = 3$ kvůli podposloupnosti 567. Dá se dokázat, že pro náhodnou permutaci π a velké n je délka $r(\pi)$ s velkou pravděpodobností rovna zhruba $2\sqrt{n}$. Ještě přesněji se dá dokázat, že rozdělení náhodné veličiny $r(\pi)$, třeba jak silně je koncentrována kolem své střední hodnoty $2\sqrt{n}$, je určeno řešením $u = u(x)$ algebraické diferenciální rovnice
$$u'' - 2u^3 - xu = 0.$$
Pro přesnou formulaci tohoto výsledku viz přehledový článek R. P. Stanleyho na `http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0512035`.

Při řešení diferenciálních rovnic se neobejdeme bez implicitních funkcí. Zaprvé obvykle chceme rovnici $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ rozřešit vzhledem k nejvyšší derivaci a převést ji do tvaru $y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. Za jistých předpokladů o funkci F to je, jak víme z věty 14 v kapitole 2, vždy lokálně možné. Zadruhé, často—hlavně v případě nelineárních rovnic—samotná řešení diferenciálních rovnic vycházejí jen jako implicitně zadané funkce.

Příklad. Uvažme (de facto algebraickou a nelineární) diferenciální rovnici prvního řádu
$$y' = \frac{x^2}{1+y^2}$$
pro funkci $y = y(x)$. Implicitní funkce y daná rovnicí $y^3 + 3y - x^3 + c = 0$, kde c je konstanta, je řešením, jak se snadno přesvědčíme zderivováním: $3y^2y' + 3y' - 3x^2 = 0$, čili $y' = x^2/(1 + y^2)$.

Co to ale přesně je *řešení* diferenciální rovnice $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$? Dvojice (y, I), kde $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a $y : I \to \mathbf{R}$ je na něm definovaná funkce, která pro každé $a \in I$ má vlastní n-tou derivaci $y^{(n)}(a)$ (tím pádem i všechny derivace předchozí) a pro každé $a \in I$ platí $F(a, y(a), y'(a), \dots, y^{(n)}(a)) = 0$. Řešení (y_1, I_1) dané diferenciální rovnice je *rozšířením* jiného řešení (y_2, I_2) (a to je *zúžením* prvního), pokud $I_1 \supset I_2$, $I_1 \neq I_2$ a pro každé $a \in I_2$ platí $y_1(a) = y_2(a)$. Řešení, které nemá rozšíření, je *maximální.*

Některé problémy, jimiž se zabývá teorie diferenciálních rovnic:

- Sestavení diferenciální rovnice pro daný problém—často nejobtížnější krok při řešení problému.
- Podmínky existence řešení a jeho (ne)jednoznačnost.
- Explicitní tvary řešení a metody jejich nalézání.
- Vlastnosti řešení (například asymptotické chování řešení $y = y(t)$ pro $t \to \infty$).
- Numerické aproximace řešení.

Existence řešení diferenciální rovnice často není jen výhradně matematickým faktem—z fyzikálního hlediska bývá zřejmá z toho, že fyzikální systém jí modelovaný se prostě nějak vyvíjet a chovat musí.

3.2. Lineární a nelineární ODR prvního řádu.

12. přednáška 20. prosince 2005

3.2. Lineární a nelineární ODR prvního řádu. Uvedeme dvě obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice 1. řádu s počáteční podmínkou:

$$(*)\begin{cases} y(a) &= b \\ y'(x) &= f(x, y(x)). \end{cases}$$

Předpokládáme, že rovnicová funkce f je spojitá na nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Řekneme, že funkce $f(x, y)$ je *lokálně lipschitzovská na množině* Ω *vzhledem k proměnné* y, když pro každý bod $a \in \Omega$ existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ takové, že pro každé dva body (x_0, y_1) a (x_0, y_2) z ε-ového okolí bodu a platí $|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| < K|y_1 - y_2|$. Lokální lipschitzovskost vyplývá například ze spojitosti parciální derivace $\partial_y f$ na Ω.

Věta 1 (Picardova). *Nechť $(a, b) \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$ a f je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné y. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ má rovnice $(*)$ právě jedno řešení $y(x)$.*

Věta 2 (Peanova). *Nechť $(a, b) \in \Omega$ a $f \in C(\Omega)$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ má rovnice $(*)$ řešení $y(x)$.*

Větu 1 jsme dokázali jako větu 18 na 5. přednášce. Věta 2, kterou na přednášce dokazovat nebudeme, za slabšího předpokladu dává slabší závěr (obecně se nedostane jednoznačnost).

Příklad. Rovnice $y(0) = 0, y' = xy^{2/3}$ má v okolí 0, fakticky na celém $\mathbf{R}$, dvě řešení: $y_1(x) \equiv 0$ a $y_2(x) = x^6/6^3$. Obecněji, zvolíme-li $c > 0$, potom funkce $y(x)$ definovaná jako $(x^2 - c)^3/6^3$ pro $x \in \mathbf{R}\backslash(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ a jako 0 pro $x \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$ je řešením. Funkce $f(x, y) = xy^{2/3}$ je totiž spojitá v bodě $(0, 0)$, ale není v jeho okolí lipschitzovská vzhledem k y.

Důsledek 3. *Nechť $f \in C(\Omega)$ je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k proměnné y. Pokud se dvě řešení diferenciální rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$ shodují v alespoň jednom bodě, potom se shodují na celém průniku svých definičních oborů.*

Důkaz. Nechť (y_1, I) a (y_2, J) jsou dvě řešení rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$, přičemž $y_1(a) = y_2(a)$ pro nějaké $a \in I \cap J$. Ze spojitosti funkcí y_1 a y_2

plyne, že množina $M = \{x \in I \cap J \mid y_1(x) = y_2(x)\}$ je uzavřená (v otevřeném intervalu $I \cap J$). Podle věty 1 je M též otevřená. Takže M je neprázdná obojetná podmnožina souvislého intervalu $I \cap J$ a nutně $M = I \cap J$. $\square$

Lineární rovnice. Vyřešíme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Zde $y = y(x)$ je neznámá funkce a funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou funkce definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu I. Řešení, které nalezneme, je definované na celém intervalu I a volbou integrační konstanty lze splnit libovolnou počáteční podmínku. Podle důsledku 3 je takové řešení jednoznačné.

Řešení metodou integračního faktoru. Nejprve nalezneme takovou funkci $c = c(x)$, tzv. integrační faktor, že $c(y'+ay) = (cy)'$. Pak $cy'+acy = cy'+c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = \mathrm{e}^A$, kde $A = A(x)$ je nějaká primitivní funkce k $a(x)$, má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme

$$(cy)' = c(y' + ay) = cb.$$

Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde D je primitivní funkce k cb a c_0 je integrační konstanta. Máme řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$. Shrnuto,

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} \left(\int \mathrm{e}^{A(x)} b(x)\, dx + c_0 \right), \quad \text{kde } A(x) = \int a(x)\, dx.$$

Všimněte si, že $y(x)$ je definovaná na celém I (definičním oboru funkcí a a b) a že každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ odpovídá přesně jedna hodnota integrační konstanty c_0, pro níž je splněna. Zavedení integrační konstanty pro A, tj. nahrazení $A(x)$ obecnějším výrazem $A(x) + c_1$, už nedává obecnější řešení, které by se nedalo dostat jen s pomocí konstanty c_0.

Řešení metodou variace konstant. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici $y' + ay = 0$. Odtud $y'/y = -a$ a $(\log y)' = -a$. Dostáváme $\log y = -A + c$ a $y = \mathrm{e}^c\mathrm{e}^{-A} = K\mathrm{e}^{-A}$, kde A je primitivní funkce k a a c a K jsou konstanty. Konstantu K v řešení $y(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$ homogenní rovnice nahradíme funkcí $K = K(x)$ a obecnou funkci $K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ dosadíme do původní rovnice, čímž dostaneme podmínku na $K(x)$:

$$\begin{aligned} (K\mathrm{e}^{-A})' + a \cdot K\mathrm{e}^{-A} &= b \\ K'\mathrm{e}^{-A} - Ka\mathrm{e}^{-A} + Ka\mathrm{e}^{-A} &= b \\ K' &= b\mathrm{e}^{A}. \end{aligned}$$

Takže $K(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{A(x)}\ dx + c$ a po dosazení do $y(x) = K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ dostáváme opět shora uvedený vzorec.

Příklad. Volný pád s odporem prostředí. Uvažujme částici o hmotnosti m, která z klidu padá vlivem konstantní tíže a na kterou kromě tíže působí i odpor prostředí. Předpokládejme, že síla odporu závisí lineárně na rychlosti částice—to je samozřejmě zjednodušení, ve skutečnosti je závislost složitější. Newtonův zákon síly dává pohybovou rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \text{tíže} - \text{odpor} = mg - kv,$$

kde $v = v(t)$ je rychlost částice v čase t, g je konstanta tíhového zrychlení a $k > 0$ je konstanta odporu prostředí. Máme lineární diferenciální rovnici

$$v' + av = b,$$

kde $a = k/m$ a $b = g$ jsou konstanty. Integrační faktor tedy je $c = \mathrm{e}^{kt/m}$ a podle hořejšího vzorce máme řešení

$$v(t) = \frac{mg}{k} + c_1\mathrm{e}^{-kt/m}.$$

Z počáteční podmínky $v(0) = 0$ vypočteme hodnotu integrační konstanty $c_1 = -mg/k$. Takže

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right).$$

Pro $t \to \infty$ se tedy rychlost částice blíží k limitní rychlosti

$$v_{lim} = \frac{mg}{k}.$$

Tento vzorec plyne také uvážením rovnovážného stavu, kdy se tíže rovná síle odporu.

Rovnice se separovanými proměnnými. Je to diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou funkce definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu I a $g \neq 0$ na I. Jedná se obecně o nelineární diferenciální rovnici, v níž na pravé straně můžeme od sebe oddělit—separovat—proměnné x a y.

Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí funkce $G(t)$, jež je primitivní k funkci $1/g(t)$ na intervalu I, jako $G(y(x))' = f(x)$. Odtud dostáváme vztah $G(y(x)) = F(x) + c$, kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na I a c je integrační konstanta. Řešení původní diferenciální rovnice je tedy dáno jako implicitní funkce vztahem

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad \text{kde} \quad G(t) = \int \frac{dt}{g(t)} \quad \text{a} \quad F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Postup při řešení rovnice se separovanými proměnnými se obvykle zapisuje takto:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)g(y) \\ g(y)^{-1}\mathrm{d}y &= f(x)\mathrm{d}x \\ \int g(y)^{-1}\,\mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ G(y) &= F(x) + c. \end{aligned}$$

Dva důležité speciální případy jsou rovnice $y' = f(x)$ a $y' = g(y)$. Řešení první z nich jsou právě funkce primitivní k $f(x)$ na I. Řešení rovnice $y' = g(y)$ je dáno implicitně jako $G(y(x)) = x+c$ a je to tedy funkce inverzní ke $G(x)+c$:

$$y(x) = \left(\int \frac{dx}{g(x)} + c\right)^{\langle -1 \rangle}.$$

Příklad. Druhá kosmická rychlost. Jakou rychlostí v_0 musíme vymrštit těleso z povrchu Země, aby nikdy nedopadlo zpět? Zanedbáme odpor vzduchu, ale pochopitelně už nemůžeme zanedbat změnu tíže s výškou. Ve výšce x nad zemským povrchem na těleso o hmotnosti m působí podle Newtonova gravitačního zákona tíže $mgR^2(x+R)^{-2}$, kde g je konstanta tíhového zrychlení na zemském povrchu a R je poloměr Země. (Podle zákona převrácených čtverců je tíže ve výšce x rovna $K(R+x)^{-2}$, kde K je konstanta. Pro $x = 0$ je tíže mg, takže K musí být mgR^2.) Podle Newtonova zákona síly jsou rychlost $v = v(t)$ a výška $x = x(t)$ tělesa v čase t svázány vztahem

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2},$$

přičemž $v(0) = v_0$. Pomocí vztahu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot v$$

(derivace složené funkce) přejdeme od nezávisle proměnné t k nezávisle proměnné x a dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými

$$v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}.$$

Počáteční podmínka $v = v_0$ pro $t = 0$ přejde na $v = v_0$ pro $x = 0$, protože $x(0) = 0$. Integrací

$$v\,dv = -\frac{gR^2\,dx}{(x+R)^2}$$

dostaneme

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c.$$

Z $v(0) = v_0$ vypočteme $c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$ a pro rychlost tělesa ve výšce x získáme vztah

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}.$$

Pokud $v_0^2 < 2gR$, rychlost v pro velkou výšku x není definovaná, což znamená, že s počáteční rychlostí v_0 těleso výšky x nikdy nedosáhne. Naopak pokud $v_0^2 \geq 2gR$, těleso dosáhne každou výšku. Úniková rychlost z povrchu Země, tzv. druhá kosmická rychlost, se tedy rovná

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

($g \approx 9.81$ ms^{-2} a $R \approx 6380$ km).

Exaktní rovnice. Je to diferenciální rovnice tvaru

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

kde M a N jsou dané funkce dvou proměnných definované na nějakém obdélníku $R \subset \mathbf{R}^2$, pro niž existuje taková funkce $\varphi = \varphi(x, y)$, že na R platí $\partial_x \varphi = M$ a $\partial_y \varphi = N$.

Rovnici pak přepíšeme jako $\varphi(x, y(x))' = 0$ a její řešení $y = y(x)$ je dáno implicitně vztahem

$$\varphi(x, y(x)) = c,$$

kde c je konstanta. Například rovnice se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$, to jest $-f + g^{-1}y' = 0$, je exaktní, protože pro ni můžeme vzít $\varphi(x, y) = -F(x) + G(y)$, kde $F = \int f\ dx$ a $G = \int g^{-1}\ dy$.

Tvrzení 4. *Nechť funkce dvou proměnných M, N, $\partial_y M$ a $\partial_x N$ jsou spojité na obdélníku $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ (povolujeme $\alpha = -\infty$ atd.). Diferenciální rovnice*

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

je exaktní na R, právě když na R platí $\partial_y M = \partial_x N$. Je-li tato podmínka splněna, potom, pro libovolný pevný bod $(x_0, y_0) \in R$, funkce

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\ ds + \int_{y_0}^{y} \left(N(x, t) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s, t)\ ds \right)\ dt$$

splňuje na R vztahy $\partial_x \varphi = M$ a $\partial_y \varphi = N$ a řešení diferenciální rovnice je implicitně dáno vztahem $\varphi(x, y(x)) = c$.

Důkaz. Pokud je rovnice exaktní a φ existuje, díky záměnnosti parciálních derivací (tvrzení 10 z 2. kapitoly) na R platí $\partial_y M = \partial^2_{xy}\varphi = \partial^2_{yx}\varphi = \partial_x N$ a tedy $\partial_y M = \partial_x N$ (zde jsme potřebovali spojitost $\partial_y M$ a $\partial_x N$).

Naopak, nechť na R platí $\partial_y M = \partial_x N$. Dokážeme, že funkce φ definovaná ve znění tvrzení splňuje $\partial_x \varphi = M$ a $\partial_y \varphi = N$. Funkce $h(x, t) = N(x, t) - \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s, t)\ ds$ nezávisí na x, protože $\partial_x h(x_1, t) = \partial_x N(x_1, t) - \partial_y M(x_1, t) = 0$ a h je pro pevné t jako funkce x konstantní. Druhý sčítanec ve formuli definující φ je, navzdory značení, funkce $f(y)$ závisející jen na y a ne na x. Při parciální derivaci podle x zmizí a $\partial_x \varphi(x_1, y) = M(x_1, y)$.

Abychom dokázali rovnost $\partial_y \varphi = N$, ukážeme, že v každém bodě $(x, y_1) \in R$ má funkce

$$g(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\ ds$$

parciální derivaci

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y_1) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s, y_1)\ ds.$$

Odtud dostaneme

$$\partial_y\varphi(x,y_1) = \partial_y g(x,y_1) + N(x,y_1) - \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,y_1)\,ds = N(x,y_1).$$

Nechť tedy $(x,y_1) \in R$ a $x \geq x_0$; případ $x \leq x_0$ je podobný. Nechť dále $h > 0$ a $y_1+h < \delta$; případ $h < 0$ a $\gamma < y_1+h$ je podobný. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje taková funkce $\theta(s)$, že pro každé $s \in [x_0,x]$ máme $0 < \theta(s) < h$ a $M(s,y_1+h) - M(s,y_1) = h \cdot \partial_y M(s,y_1+\theta(s))$. Takže

$$\begin{aligned}
\frac{g(x,y_1+h)-g(x,y_1)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} M(s,y_1+h)\,ds - \int_{x_0}^{x} M(s,y_1)\,ds\right)\\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{M(s,y_1+h)-M(s,y_1)}{h}\,ds\\
&= \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,y_1+\theta(s))\,ds.
\end{aligned}$$

Protože $\partial_y M$ je stejnoměrně spojitá na každé uzavřené a omezené podmnožině R (viz věty 9 a 10 z 1. kapitoly), pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\eta > 0$, že

$$s \in [x_0,x] \ \&\ \theta \in [0,\eta] \Rightarrow |\partial_y M(s,y_1+\theta) - \partial_y M(s,y_1)| < \varepsilon.$$

Pro $h < \eta$ pak

$$\left|\int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,y_1+\theta(s))\,ds - \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,y_1)\,ds\right|$$

je nejvýše

$$\int_{x_0}^{x} |\partial_y M(s,y_1+\theta(s))\,ds - \partial_y M(s,y_1)|\,ds < (x-x_0)\varepsilon.$$

Proto pro každé h splňující $0 < h < \eta$ (a $y_1+h < \delta$) máme

$$\left|\frac{g(x,y_1+h)-g(x,y_1)}{h} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,y_1)\,ds\right| < (x-x_0)\varepsilon.$$

Pro $\varepsilon \to 0$ dostáváme $\partial_y g(x,y_1) = \int_{x_0}^{x} \partial_y M(s,y_1)\,ds$. □

Příklad. Vyřešte rovnici

$$(y\cos x + 2x\mathrm{e}^y) + (\sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2)y' = 0.$$

Rovnice je na $R = \mathbf{R}^2$ exaktní, protože $\partial_y M = \partial_x N = \cos x + 2x\mathrm{e}^y$. Z

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, ds + f(y) = \int_{x_0}^{x} (y \cos s + 2s\mathrm{e}^y)\, ds + f(y)$$

máme

$$\varphi(x, y) = y \sin x + x^2\mathrm{e}^y + F(y),$$

čímž je splněna podmínka $\partial_x \varphi = M$. Ze $\sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2 = N = \partial_y \varphi = \sin x + x^2\mathrm{e}^y + F'(y)$ máme $F'(y) = 2$. Takže $F(y) = 2y$, $\varphi(x, y) = y \sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2y$ a řešení $y = y(x)$ je dáno implicitně vztahem

$$y \sin x + x^2\mathrm{e}^y + 2y = c.$$

13. přednáška 3. ledna 2006

V úvodu přednášky zazněl důkaz tvrzení 4, který jsem uvedl v textu k předchozí přednášce.

3.3. Soustavy lineárních ODR prvního řádu. Jedna diferenciální rovnice n-tého řádu se dá ekvivalentně převést na soustavu diferenciálních rovnic prvého řádu. Je totiž jasné, že funkce $y = y(x)$ je na intervalu I řešením rovnice n-tého řádu

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

právě když $(n+1)$-tice funkcí $y(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ je na intervalu I řešením soustavy rovnic prvního řádu

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y' \\ y_2 & = & y_1' \\ & \vdots & \\ y_n & = & y_{n-1}' \\ F(x, y, y_1, \ldots, y_n) & = & 0. \end{array}$$

Za snížení řádu jsme ovšem zaplatili zavedením dalších n funkcí. Povšimněme si, že spíše než o skutečnou redukci jednoho problému na druhý se tu jedná o "rozvinutí" značení: symbol y'' je tak jako tak zaveden jen jako zkratka pro $(y')'$, y''' jen jako zkratka pro $((y')')'$ atd.

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y + b = 0,$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou zadané funkce, je tímto způsobem ekvivalentní dosti speciální soustavě lineárních rovnic prvního řádu

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y' \\ y_2 & = & y_1' \\ & \vdots & \\ y_n & = & y_{n-1}' \\ y_n + a_{n-1}y_{n-1} + \cdots + a_0 y + b & = & 0. \end{array}$$

Budeme se zabývat teorií soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y_i' = a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \cdots + a_{i,n}y_n + b_i,\ 1 \le i \le n,$$

kde $a_{i,j} = a_{i,j}(x)$ a $b_i = b_i(x)$, $1 \le i, j \le n$, je $n^2 + n$ zadaných funkcí, definovaných na nějakém otevřeném intervalu I, a $y_i = y_i(x)$, $1 \le i \le n$, jsou neznámé funkce. V maticovém zápisu,

$$y' = Ay + b,$$

kde $A : I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b : I \to \mathbf{R}^n$ je daná maticová a daná vektorová funkce a $y : I \to \mathbf{R}^n$ je neznámá vektorová funkce. V dalším budeme vždy předpokládat, že funkce $a_{i,j}(x)$ a $b_i(x)$ jsou spojité na intervalu I.

Věta 5. *Nechť $a_{i,j}$, $b_i : I \to \mathbf{R}$, $1 \le i, j \le n$, jsou funkce spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$, $\alpha \in I$ a $\beta \in \mathbf{R}^n$. Potom soustava lineárních diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami*

$$\begin{array}{rcl} y(\alpha) & = & \beta \\ y'(x) & = & Ax + b \end{array}$$

má na intervalu I jediné řešení. To jest existuje jediná n-tice funkcí $y_1, \ldots, y_n$ z $C^1(I)$, která pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $x \in I$ splňuje rovnosti

$$y_i(\alpha) = \beta_i \quad a \quad y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)y_j(x) + b_i(x).$$

Důkaz věty 5, který je opět založen na větě o kontrahujícím zobrazení, nebudeme na přednášce dělat. Na rozdíl od vět 1 a 2 dostáváme globální existenci a jednoznačnost řešení na celém intervalu I. Z věty 5 plyne, že pokud se dvě řešení z a u soustavy $y' = Ay + b$ shodují v jednom bodě $x_0 \in I$ (tj. $z(x_0)$ a $u(x_0)$ je tatáž n-tice z $\mathbf{R}^n$), potom se shodují na celém I, $z(x) = u(x)$ pro $\forall x \in I$.

Uvažme množinu řešení homogenní soustavy $y' = Ay$ a množinu řešení nehomogenní soustavy $y' = Ay + b$:

$$H = \{y \in C^1(I)^n \mid y' = Ay \text{ na } I\} \ \text{ a } \ M = \{y \in C^1(I)^n \mid y' = Ay + b \text{ na } I\}.$$

Množina n-tic funkcí $C^1(I)^n$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ nekonečné dimenze.

Tvrzení 6. *H je vektorový podprostor $C^1(I)^n$ s dimenzí n. M je afinní podprostor $C^1(I)^n$ s dimenzí n. Pro každé řešení $y \in M$ platí, že $M = y + H = \{y + z \mid z \in H\}$.*

Důkaz. Díky linearitě derivování a maticového násobení je zřejmé, že H je vektorový podprostor: Pokud $y, z \in H$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, pak $(\alpha y + \beta z)' = \alpha y' + \beta z' = \alpha A y + \beta A z = A(\alpha y + \beta z)$ a $\alpha y + \beta z \in H$. Stejně se dokážou i implikace $y, z \in M \Rightarrow y - z \in H$ a $y \in M, z \in H \Rightarrow y + z \in M$, které dávají, že $M = y + H$. Existence alespoň jednoho řešení $y \in M$ plyne z věty 5.

Dokážeme, že $\dim H = n$; odtud hned plyne $\dim M = n$. Nechť $x_0 \in I$ je libovolné číslo, $\{e^i \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leq i \leq n\}$ je kanonická báze $\mathbf{R}^n$ (i-tá složka e^i je 1 a ostatní jsou nuly) a $\{y^i \in H \mid 1 \leq i \leq n\}$ jsou řešení homogenní soustavy splňující počáteční podmínky $y^i(x_0) = e^i$, $1 \leq i \leq n$; tato řešení existují podle věty 5. Je jasné (podle hodnot v x_0), že $\{y^1, \ldots, y^n\}$ je lineárně nezávislá množina v $C^1(I)^n$. Je-li $y \in H$ libovolné řešení, které má v x_0 hodnoty

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

potom funkce $z(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i(x)$ patří do H a $z(x_0) = y(x_0)$. Podle věty 5 máme $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in I$ a tedy $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i$. Takže $H = Lin(\{y^1, \ldots, y^n\})$ a $\dim H = n$. □

Každá báze prostoru H se nazývá *fundamentálním systémem řešení (FSŘ)* homogenní soustavy $y' = Ay$.

Wronského determinant neboli wronskián n-tice vektorových funkcí $f^1, \ldots, f^n : I \to \mathbf{R}^n$ je funkce $W : I \to \mathbf{R}$ definovaná jako

$$W(x) = W_{f^1,\ldots,f^n}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \ldots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \ldots & f_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n^1(x) & f_n^2(x) & \ldots & f_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Připomeňme si, že $f^1, \ldots, f^n$ jsou *lineárně závislé (LZ)*, existují-li konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, ne všechny nulové, že pro každé $x \in I$ platí $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x) = \overline{0}$. Zřejmě

$$f^1, \ldots, f^n \text{ jsou LZ } \Longrightarrow W_{f^1,\ldots,f^n}(x) \text{ pro } \forall x \in I$$

(matice definující $W(x)$ má pro každé $x \in I$ lineárně závislé sloupce). Opačná implikace obecně neplatí (rozmyslete si jako cvičení proč). Nicméně platí v případě, že $f^1, \dots, f^n$ jsou řešení homogenní soustavy $y' = Ay$.

Tvrzení 7. *Nechť vektorové funkce $f^1, \dots, f^n : I \to \mathbf{R}^n$ na I splňují $(f^i)' = Af^i$, pro danou maticovou funkci $A : I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ se spojitými položkami, a W je jejich wronskián. Pak*

$$\exists x \in I : \ W(x) = 0 \implies f^1, \dots, f^n \text{ jsou LZ}$$

a tedy

$$\exists x \in I : \ W(x) = 0 \iff \forall x \in I : \ W(x) = 0.$$

Důkaz. Pokud $W(x_0) = 0$ pro nějaké $x_0 \in I$, má matice hodnot vektorových funkcí $f^i(x_0)$ lineárně závislé sloupce: $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x_0) = \overline{0}$ pro nějaké $\alpha_i \in \mathbf{R}$, ne všechny nulové. Vektorová funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x)$ též splňuje na I soustavu $f' = Af$ a splňuje počáteční podmínku $f(x_0) = \overline{0}$. Jiným řešením $y' = Ay$ splňujícím $y(x_0) = \overline{0}$ je identicky nulová vektorová funkce. Podle věty 5 se obě řešení na I rovnají a f je tedy identicky nulová. Takže $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x) = \overline{0}$ pro každé $x \in I$ a $f^1, \dots, f^n$ jsou LZ. V ekvivalenci je implikace $\Leftarrow$ triviální a $\Rightarrow$ plyne spojením právě dokázané implikace a implikace uvedené před tvrzením. □

Wronskián n-tice řešení $f^1, \dots, f^n$ homogenní soustavy $y' = Ay$ je tedy na I buď vždy nenulový a $f^1, \dots, f^n$ tvoří FSŘ, nebo je na I vždy nulový a $f^1, \dots, f^n$ jsou LZ a netvoří FSŘ.

Následující formule ukazuje, jak z FSŘ homogenní soustavy dostat jedno (tzv. partikulární) řešení soustavy s pravou stranou.

Tvrzení 8 (metoda variace konstant). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $A : I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b : I \to \mathbf{R}^n$ jsou daná maticová a daná vektorová funkce se spojitými položkami a $y^1, \dots, y^n : I \to \mathbf{R}^n$ je FSŘ homogenní soustavy $y' = Ay$. Nechť dále $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$ jsou dané počáteční podmínky a*

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

je matice hodnot vektorových funkcí y^i. Pak vektorová funkce $z: I \to \mathbf{R}^n$ definovaná formulí

$$z(x) = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} b(t)\, dt + Y(x_0)^{-1} y^0\right)$$

je řešením nehomogenní soustavy $y' = Ay + b$ a splňuje počáteční podmínku $z(x_0) = y^0$.

Důkaz. Příště. $\square$

14. přednáška 10. ledna 2006

Tvrzení 8 (metoda variace konstant). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $A: I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b: I \to \mathbf{R}^n$ jsou daná maticová a daná vektorová funkce se spojitými položkami a $y^1, \dots, y^n : I \to \mathbf{R}^n$ je FSŘ homogenní soustavy $y' = Ay$. Nechť dále $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$ jsou dané počáteční podmínky a*

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

je matice hodnot vektorových funkcí y^i. Pak vektorová funkce $z: I \to \mathbf{R}^n$ definovaná formulí

$$z(x) = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} b(t)\, dt + Y(x_0)^{-1} y^0\right)$$

je řešením nehomogenní soustavy $y' = Ay + b$ a splňuje počáteční podmínku $z(x_0) = y^0$.

Důkaz. Řešení soustavy $y' = Ay + b$ budeme hledat ve tvaru $z = \sum_{i=1}^n c_i y^i = Yc$, kde $c_i = c_i(x)$ jsou neznámé funkce a c je jejich sloupcový vektor. Protože pro každé $x \in I$ se $\sum_{i=1}^n c_i(x)(y^i)'(x)$ rovná $A(x) \cdot \sum_{i=1}^n c_i(x) y^i(x)$, dosazením $z(x)$ do nehomogenní soustavy dostaneme podmínky na c_i:

$$\begin{aligned} Az + b &= z' = \sum_{i=1}^n c_i (y^i)' + \sum_{i=1}^n c_i' y^i \\ b &= \sum_{i=1}^n c_i' y^i = Yc'. \end{aligned}$$

Protože systém $y^1, \dots, y^n$ je FSŘ soustavy $y' = Ay$, jeho wronskián $W = \det Y$ je v každém bodě $x \in I$ nenulový a matice $Y(x)$ je invertibilní. Takže

$$c' = Y^{-1} b \ \text{ a } \ c(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t) b(t)\, dt + d,$$

kde d je sloupcový vektor konstant. Celkem

$$z(x) = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} b(t)\, dt + d\right).$$

Pro $d = Y(x_0)^{-1}y^0$ je splněna počáteční podmínka. $\square$

Popíšeme FSŘ pro homogenní lineární rovnici řádu n s konstantními koeficienty. Je to rovnice

$$R(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_i \in \mathbf{R}$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$, a $y = y(x)$ je neznámá funkce. Definiční interval I je zde $I = \mathbf{R}$. *Charakteristický polynom* rovnice $R(y) = 0$ je

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Označme $K(p) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid p(\lambda) = 0\}$ množinu jeho kořenů a pro $\lambda \in K(p)$ symbolem $n(\lambda) \in \mathbf{N}$ násobnost kořene. Uvažme množiny funkcí

$$\mathcal{F}(R, \mathbf{C}) = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid \lambda \in K(p), 0 \leq k < n(\lambda)\}$$

a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(R, \mathbf{R}) = \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \mid \lambda \in K(p) \cap \mathbf{R}, 0 \leq k < n(\lambda)\} \\
&\cup \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x) \mid \lambda + \mu i \in K(p), \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mu > 0, 0 \leq k < n(\lambda + \mu i)\} \\
&\cup \{x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x) \mid \text{dtto}\}.
\end{aligned}$$

Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ obsahují obecně komplexní exponenciálu. Funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou reálné a $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ vznikl z $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ náhradou dvojic komplexních funkcí $x^k \mathrm{e}^{(\lambda + \mu i)x}$, $x^k \mathrm{e}^{(\lambda - \mu i)x}$ (nereálné kořeny p se vyskytují ve dvojicích $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ komplexně sdružených kořenů se stejnými násobnostmi) dvojicemi reálných funkcí $x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \sin(\mu x)$, $x^k \mathrm{e}^{\lambda x} \cos(\mu x)$. Je zřejmé, že $|\mathcal{F}(R, \mathbf{C})| = |\mathcal{F}(R, \mathbf{R})| = n$.[9] Ukážeme, že $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je FSŘ rovnice $R(y) = 0$. Platí to i o $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$, ale museli bychom pracovat s funkcemi s hodnotami v $\mathbf{C}$.

Lemma 9. *Každá funkce ve $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ i ve $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$.*

Důkaz. Protože $(\mathrm{e}^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m \mathrm{e}^{\lambda x}$, pro každý kořen $\lambda \in K(p)$ (p je charakteristický polynom rovnice $R(y) = 0$) máme $R(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \mathrm{e}^{\lambda x} p(\lambda) = 0$ a $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je řešením.

[9] Zřejmé je zde to, že v případě třeba $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ máme přesně n různých dvojic parametrů (k, λ) určujících fukce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$. Rozmyslete si, že dvěma různým dvojicím odpovídají dvě různé funkce, takže opravdu $|\mathcal{F}(R, \mathbf{C})| = n$. Podobně pro $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$.

Abychom vyrobili další řešení, uvažme "derivovanou" rovnici řádu $n-1$

$$R'(y) = na_n y^{(n-1)} + \cdots + 2a_2 y' + a_1 y = 0.$$

Její charakteristický polynom je $p'(x)$, derivace charakteristického polynomu původní rovnice. Podobně definujeme rovnici $R''(y) = 0$ atd. Nechť $f = f(x)$ je funkce a $R(f) = R'(f) = 0$. Díky $(xf)^{(m)} = mf^{(m-1)} + xf^{(m)}$ máme

$$R(xf) = R'(f) + xR(f) = 0.$$

Takže

$$R(f) = R'(f) = 0 \Rightarrow R(xf) = 0.$$

Má-li kořen $\lambda \in K(p)$ násobnost $m = n(\lambda)$, je $\mathrm{e}^{\lambda x}$ řešením všech rovnic $R(y) = 0, R'(y) = 0, \ldots, R^{(m-1)}(y) = 0$, protože λ je kořenem všech jejich charakteristických polynomů $p, p', \ldots, p^{(m-1)}$. Opakovaným užitím právě dokázané implikace dostáváme, že $R(\mathrm{e}^{\lambda x}) = R(x\mathrm{e}^{\lambda x}) = \cdots = R(x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda x}) = 0$. Tím jsme dokázali, že každá funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$.

Pro dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda + \mu i, \lambda - \mu i$ v $K(p)$, $\mu > 0$, si označme funkce v odpovídajících dvojicích v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$:

$$f_1 = x^k \mathrm{e}^{(\lambda+\mu i)x}, f_2 = x^k \mathrm{e}^{(\lambda-\mu i)x}, g_1 = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\sin(\mu x), g_2 = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\cos(\mu x).$$

Pak (díky $\mathrm{e}^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$g_2 = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{a} \quad g_1 = \frac{f_1 - f_2}{2i}.$$

Takže (množina řešení rovnice $R(y) = 0$ je uzavřená na lineární kombinace) z $R(f_1) = R(f_2) = 0$ plyne i $R(g_1) = R(g_2) = 0$. Pro reálný kořen $\lambda \in K(p)$ je odpovídající funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ stejná. Dokázali jsme, že i každá funkce v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je řešením rovnice $R(y) = 0$. $\square$

Zbývá dokázat lineární nezávislost funkcí v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$. Asi nejjednodušší důkaz je ten, kdy se indukcí dokáže nezávislost funkcí v komplexním systému $\mathcal{F}(R, \mathbf{C})$ a z toho se odvodí nezávislost systému $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$, viz A. Pultr, *Skripta z matematické analýzy*, `http://kam.mff.cuni.cz/~pultr/`, kapitola XIX, str. 26. Zde uvádíme o něco složitější důkaz přímo pro reálný systém $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$.

Lemma 10. *Funkce v systému $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Ukážeme, že v systému funkcí (definovaných na $I = \mathbf{R}$)

$$\mathcal{F} = \{x^k e^{\lambda x} \cos(\mu x), x^k e^{\lambda x} \sin(\mu x) \mid k \in \mathbf{Z}, \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mu \geq 0\} \backslash \{f(x) \equiv 0\}$$

není žádná n-tice funkcí lineárně závislá. Protože $\mathcal{F}(R, \mathbf{R}) \subset \mathcal{F}$, budeme tím hotovi.

Uvážíme dva podsystémy $\mathcal{F}^-$ a $\mathcal{F}^0$. Podsystém $\mathcal{F}^-$ obsahuje ty $f \in \mathcal{F}$, které mají $\lambda < 0$ (a libovolné k a μ) nebo mají $\lambda = 0, k < 0$ (a libovolné μ). Podsystém $\mathcal{F}^0$ obsahuje funkce $\cos(\mu x)$ a $\sin(\mu x)$ pro reálná $\mu > 0$ a funkci identicky rovnou 1 (již chápeme jako $\cos(0x)$). Pro každou funkci $f \in \mathcal{F}^-$ zřejmě $f(x) \to 0$ pro $x \to \infty$ a $f' \in Lin(\mathcal{F}^-)$. Tedy pro libovolné $m \in \mathbf{N}$ a $f \in Lin(\mathcal{F}^-)$ máme $f^{(m)} \in Lin(\mathcal{F}^-)$ a $f^{(m)}(x) \to 0$ pro $x \to \infty$. Pokud $f \in \mathcal{F}^0$ má $\mu > 0$ (tedy f není identicky rovná 1) a $m \in \mathbf{N}_0$ je násobek čtyř, pak zřejmě $f^{(m)} = \mu^m f$.

Nechť

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x), \ n \geq 1, \ \alpha_i \in \mathbf{R}, \ f_i \in \mathcal{F}, \ f_i \neq f_j \text{ pro } i \neq j$$

je netriviální lineární kombinace vzájemně různých funkcí z $\mathcal{F}$. Ne všechny α_i jsou tedy nulové a rovnou předpokládáme, že jsou všechny nenulové. Ukážeme, že pro nějaké $x_0 \in \mathbf{R}$ je $F(x_0) \neq 0$. Nechť $L \in \mathbf{R}$ je největší λ vyskytující se v f_i, $1 \leq i \leq n$, a $K \in \mathbf{Z}$ je největší k vyskytující se v těch f_i, co mají $\lambda = L$. Pak

$$\begin{aligned} F^*(x) = \frac{F(x)}{x^K e^{Lx}} &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i h_i(x) \\ &= G(x) + H(x), \end{aligned}$$

kde čísla $\beta_i, \gamma_i \in \mathbf{R}$ jsou všechna nenulová, $g_i \in \mathcal{F}^0$, $h_i \in \mathcal{F}^-$, $m \geq 1$, $r \in \mathbf{N}_0$ a funkce g_i a h_i jsou vzájemně různé. První suma vždy obsahuje alespoň jeden sčítanec, ale druhá může být prázdná (pak definujeme $H(x)$ jako $H(x) \equiv 0$). Připomeňme si, že pro každé pevné $m \in \mathbf{N}_0$ a $x \to \infty$ máme $H^{(m)}(x) \to 0$. Nalezneme takové $M \in \mathbf{N}_0$, že $(F^*)^{(M)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in \mathbf{R}$. Pak $F^*(x)$ a $F(x)$ nemohou být identicky nulové na okolí bodu x_0.

Nechť $U_1 \geq 0$ je největší μ vyskytující se v g_i, $1 \leq i \leq m$. Pokud $U_1 = 0$, znamená to, že $G(x) = \beta_1 g_1(x) = \beta_1 \cos(0x) \equiv \beta_1$. Pak $\lim_{x \to \infty} F^*(x) = \beta_1 \neq 0$ a jsme hotovi. Nechť $U_1 > 0$. Jako $U_2 \geq 0$ definujeme druhé největší μ

vyskytující se v g_i, $1 \leq i \leq m$ (pokud neexistuje, klademe $U_2 = 0$). Položíme $\beta = \max |\beta_i|$, $1 \leq i \leq m$. Vezmeme tak veliký násobek čtyř $M \in \mathbf{N}$, že

$$\delta = |\beta_1| U_1^M - \beta(m-1) U_2^M > 0$$

(protože $0 \leq U_2 < U_1$ a $|\beta_1| > 0$, takové M existuje). Můžeme předpokládat, že největší μ se nabývá v g_1 a že $g_1(x) = \sin(U_1 x)$; pro $r \in \mathbf{N}_0$ položíme $x_r = (2r + 1/2)\pi/U_1$ (pokud $g_1(x) = \cos(U_1 x)$, položíme $x_r = 2r\pi/U_1$). Pak $g_1^{(M)}(x_r) = U_1^M g_1(x_r) = U_1^M$ a $|g_i^{(M)}(x_r)| \leq U_2^M$ pro $i > 1$, protože pro $i > 1$ je buď μ v g_i nanejvýš U_2, nebo $g_i(x) = \cos(U_1 x)$, pak ale $|g_i^{(M)}(x_r)| = 0$. Takže, pro všechny $r \in \mathbf{N}_0$,

$$|G^{(M)}(x_r)| \geq |\beta_1 g_1^{(M)}(x_r)| - \sum_{i=2}^{m} |\beta_i g_i^{(M)}(x_r)| \geq |\beta_1| U_1^M - \beta(m-1) U_2^M = \delta > 0.$$

Celkem

$$|(F^*)^{(M)}(x_r)| \geq |G^{(M)}(x_r)| - |H^{(M)}(x_r)| \geq \delta - |H^{(M)}(x_r)|$$

a pro $r > r_0$ máme $|(F^*)^{(M)}(x_r)| > \delta/2 > 0$, čímž jsme hotovi. □

Věta 11. *Systém $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je FSŘ rovnice $R(y) = 0$. Každé řešení je tedy lineární kombinací n-tice funkcí v $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$.*

Důkaz. Víme, že $|\mathcal{F}(R, \mathbf{R})| = n$ a podle dvou předchozích lemmat, že $\mathcal{F}(R, \mathbf{R})$ je lineárně nezávislá množina řešení rovnice

$$R(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

jejíž množina řešení má dimenzi n podle tvrzení 6. Je to tedy její FSŘ. □